МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
2 СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие

Предназначено для студентов 1-го курса заочной формы обучения
по направлению 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Ростов-на-Дону

ДГТУ

2023

Составитель: канд. физ.мат. наук, доцент Нурутдинова И.Н.

Приведены варианты заданий контрольных работ для студентов заочной формы обучения по основным темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Математика» во 2-м семестре. Приведены образцы решения всех заданий, снабжённые необходимыми теоретическими сведениями.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие содержит индивидуальные задания контрольнй работы, выполняемой студентами заочной формы обучения во 2-м семестре. тематика заданий охватывает все основные разделы дисциплины «Математика», изучаемые во 2-м семестре: производная функции ее приложения, функции двух переменных, неопределенный интеграл, определенный интеграл, дифференциальные уравнения.

Задания по каждой теме имеют 20 вариантов, правило выбора варианта перед заданиями контрольной работы. Представлены основные теоретическими положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины, и подробное решение всех заданий. Выбор тематики осуществлялся на основе анализа ФГОС ВО в базовой подготовке бакалавров направления 15.03.04. Также приведен список теоретических вопросов для подготовки к экзамену и рекомендуемая литература.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 2 СЕМЕСТР ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРАВИЛО ВЫБОРА ВАРИАНТА

Номер варианта студент выбирает согласно порядковому номеру в журнале группы. Если порядковый номер в журнале больше 20, то номер выбирается сначала, т.е. порядковый номер 21 - номер варианта - 1, порядковый номер 22 - номер варианта - 2 и т.д.

Задание 1.
1.1. Найти производные 1-го порядка функций *а*), *б*), *в*), и *г*);
1.2. Найти производную 2-го порядка функции *а*)
1.3. Записать дифференциал первого порядка функции а)

1	*а*) $y=x^3+\frac{4}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}$;	*б*) $s=(5-3\operatorname{arctg}t)e^t$;	*в*) $u=tg^4(3V+2)$;	*г*) $z=\frac{\ln(4-5t)}{\sin t}$.
2	*а*) $y=2x-\frac{3}{x^4}+4\sqrt{x^3}$;	*б*) $s=(3-\cos t)(5+2\sin t)$;	*в*) $u=\sqrt{V-3\ln V}$;	*г*) $z=\frac{t^3-e^{3t}}{\arccos 2t}$.
3	*а*) $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{x^2}-x$;	*б*) $s=(t^2-5\ln t)(t+\ln t)$;	*в*) $u=\sqrt{\cos^3 V}$;	*г*) $z=\frac{t^2+e^{2t}}{\arcsin t}$.
4	*а*) $y=x^4+\frac{1}{x}-2\sqrt[3]{x}$;	*б*) $s=(3t^3-4)(t-2\cos t)$;	*в*) $u=\ln^2(5V-3)$;	*г*) $z=\frac{1-3\operatorname{tg}t}{\operatorname{arctg}2t}$.
5	*а*) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x^3}+4\sqrt{x}$;	*б*) $s=(6t+\arcsin t)6^t$;	*в*) $u=\ln^2(4V+3)$;	*г*) $z=\frac{5+\operatorname{tg}2t}{\cos 2t}$.
6	*а*) $y=5x-\frac{2}{x^4}+3\sqrt[5]{x^6}$;	*б*) $s=(t^2-3)(4t+2\ln t)$;	*в*) $u=\cos^3(3V+1)$;	*г*) $z=\frac{t-\arcsin 3t}{e^{-t}}$.
7	*а*) $y=x^3-\frac{3}{x^4}+\sqrt[4]{x^9}$;	*б*) $s=(4-\cos t)\ln t$;	*в*) $u=\operatorname{arctg}^2\frac{V}{2}$;	*г*) $z=\frac{\arccos 3t}{1-9t^2}$.
8	*а*) $y=\frac{7}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-4x$;	*б*) $s=(3t+2\ln t)\ln t$;	*в*) $u=\operatorname{arctg}^3(2V-1)$;	*г*) $z=\frac{\sin(t^2+3)}{e^{-2t}}$.
9	*а*) $y=5x^9+\frac{2}{x^3}+\sqrt[8]{x}$;	*б*) $s=\frac{e^t-5t}{t^3}$;	*в*) $u=\operatorname{ctg}^4\frac{V}{4}$;	*г*) $z=\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\ln(9+t^2)$.
10	*а*) $y=\frac{x^5}{5}+2\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{x}$;	*б*) $s=(7t+\arccos t)\ln t$;	*в*) $u=\ln^5(1-V)$;	*г*) $z=\frac{1-3\operatorname{tg}(t/3)}{\cos(t/3)}$.
11	*а*) $y=\frac{4}{\sqrt{x}}+9x^2-\frac{7}{x}$;	*б*) $s=\frac{2-\ln t}{1+2\arcsin t}$;	*в*) $u=tg^3(6V+1)$;	*г*) $z=e^{-4t^2}(5+\cos 2t)$.
12	*а*) $y=2\sqrt{x}-\frac{4}{x}+3x^2$;	*б*) $s=(e^t-3t^2)\ln t$;	*в*) $u=\sin^3(8V+1)$;	*г*) $z=\frac{3^{\sin t}-1}{\operatorname{arctg}2t}$.
13	*а*) $y=2x^3-\frac{5}{x^7}-\sqrt[4]{x^5}$;	*б*) $s=t^3(4+2\operatorname{arctg}t)$;	*в*) $u=\ln^3\frac{V}{2}$;	*г*) $z=\frac{5-\sin 3t}{e^{2t}}$.

14	*а)* $y=\frac{x^4}{2}-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{x}$;	*б)* $s=(e^t-3t^2)\mathrm{tg}t$;	*в)* $u=\sqrt{\arccos 2V}$;	*г)* $z=\frac{\ln(t-e^{3t})}{t^4}$.
15	*а)* $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x^3}+\sqrt[3]{x}-2$;	*б)* $S=(4-2\sin t)e^t$;	*в)* $u=\cos^5(4V-1)$;	*г)* $z=\frac{\arcsin 2t}{1-4t^2}$.
16	*а)* $y=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{5}\sqrt[5]{x^2}-\frac{4}{x^3}$;	*б)* $s=(t-\arcsin t)\sin t$;	*в)* $u=\mathrm{ctg}^2(3-2V)$;	*г)* $z=\frac{\ln(\cos t-1)}{e^{-4t}}$.
17	*а)* $y=3x^2-\frac{2}{x^4}+\sqrt[5]{x}$;	*б)* $s=(3-2e^t)(6+5e^t)$;	*в)* $u=\mathrm{arctg}^3\frac{V}{3}$;	*г)* $z=\frac{t-\cos t}{\ln(t^2-1)}$.
18	*а)* $y=x^5-\frac{2}{x^3}+2\sqrt[7]{x^5}$;	*б)* $s=(4-3\ln t)(5+2\sin t)$;	*в)* $u=\arcsin^3 2V$;	*г)* $z=\frac{4t^3-2e^{3t}}{\cos t}$.
19	*а)* $y=7x^2+\frac{4}{x^6}-\sqrt[5]{x^2}$;	*б)* $s=(1+t^2)(2-3\mathrm{arcctg}t)$;	*в)* $u=\sin^4(2V+3)$;	*г)* $z=\frac{\mathrm{arctg}2t}{1+4t^2}$.
20	*а)* $y=5x^2+\frac{3}{x^4}-\sqrt[6]{x^7}$;	*б)* $s=(3+\mathrm{tg}t)(1-5\mathrm{ctg}t)$;	*в)* $u=\sqrt[3]{1-4V^2}$;	*г)* $z=\frac{\sin(2-t)}{2-\ln 3t}$.

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Номер варианта	Вид функции $f(x)$	Номер варианта	Вид функции $f(x)$
1	$\sqrt[3]{x^2+4},\ x_0=2.$	**2**	$\sqrt{1+3x},\ x_0=1.$
3	$2\sqrt[3]{x}+x-3,\ x_0=8.$	**4**	$\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2},\ x_0=-2.$
5	$2x+\frac{1}{x},\ x_0=1.$	**6**	$\sqrt{x}+2x,\ x_0=4.$
7	$\frac{x^2-3}{x},\ x_0=-1.$	**8**	$\frac{x^2}{x-2},\ x_0=1.$
9	$\sqrt{5-x^2},\ x_0=1.$	**10**	$\frac{1}{x^2}-4\sqrt[3]{x},\ x_0=-1.$
11	$\frac{3}{\sqrt{5-x^2}},\ x_0=2.$	**12**	$\frac{x^2+3x}{3},\ x_0=-1.$
13	$6\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x},\ x_0=1.$	**14**	$x+\frac{1}{x},\ x_0=2.$
15	$\frac{x^2-2x-3}{4},\ x_0=3.$	**16**	$x^2+e^{3-x},\ x_0=3.$
17	$14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x},\ x_0=1.$	**18**	$\sqrt[3]{1-x^2},\ x_0=3.$
19	$\frac{x}{x^2+1},\ x_0=-2.$	**20**	$3\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{4x}\right),\ x_0=1.$

Задание 3. Построить график функции $y=f(x)$, используя общую схему исследования функции.

Номер варианта	Вид функции $f(x)$	Номер варианта	Вид функции $f(x)$
1	$-5x^3+30x^2-45x+10$	**2**	$x^3-9x^2+24x-18$

3	$x^3+6x^2-15x+8$	**4**	$-x^3+9x^2-15x-3$
5	$x^3+12x^2+45x+50$	**6**	$2x^3-15x^2+24x+1$
7	x^3-3x^2-9x-5	**8**	$-x^3+6x^2-9x+2$
9	$x^3+3x^2-24x+28$	**10**	x^3+4x^2-3x-8
11	x^3+3x^2-9x+5	**12**	$-x^3+x^2+5x+3$
13	$x^3-3x^2-24x-28$	**14**	$x^3-12x+5$
15	x^3-6x^2+9x-4	**16**	$2x^3-12x^2+18x-5$
17	$x^3-6x^2-15x-8$	**18**	$x^3-15x^2+48x+3$
19	$x^3-12x^2+45x-50$	**20**	x^3+6x^2+9x+4

Задание 4. Найти частные производные первого порядка от функции по каждому аргументу.

№ вар.	$\boldsymbol{Z(x,y)}$ $\boldsymbol{Z'_x=?\ Z'_y=?}$	**№ вар.**	$\boldsymbol{Z(x,y)}$ $\boldsymbol{Z'_x=?\ Z'_y=?}$
1	$Z=x^5y^{-1}-3x^2\sqrt{y}$	**11**	$Z=x\left(x^2-y\right)-\sqrt[3]{y}$
2	$Z=\dfrac{3}{x^2}-\sqrt[3]{x^2y}$	**12**	$Z=\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{2y}{x}$
3	$Z=\dfrac{x^2y}{2}-\dfrac{x}{y}$	**13**	$Z=y^2\left(x^3+2y\right)-\dfrac{x}{y^3}$
4	$Z=2xy^3-\sqrt{x^3y^5}$	**14**	$Z=\left(1-x^2\right)y^3+\sqrt{y}$
5	$Z=\sqrt{xy^3}+x(1-y^2)$	**15**	$Z=\dfrac{x}{2}-x\left(y^4+5\right)$
6	$Z=1-2x^2y+\sqrt[4]{xy}$	**16**	$Z=x^2-4x\sqrt{y}$
7	$Z=\dfrac{1}{3}x^3y^3-\dfrac{2}{y}$	**17**	$Z=4xy^3+\sqrt[8]{x^3}$
8	$Z=x\sqrt{x^3y}-\dfrac{x^2}{y^2}$	**18**	$Z=2x^3+2\sqrt{xy}-1$
9	$Z=y^3+6x\sqrt{y}-5$	**19**	$Z=y\left(2x-y\right)+\sqrt[3]{x^2y}$
10	$Z=x^2-3y+y\sqrt[3]{x}$	20	$Z=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}$

Задание 5. Исследовать на экстремум функцию $Z = Z(x, y)$.

№ вар.	$Z(x, y)$	№ вар.	$Z(x, y)$
1	$z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$	**2**	$z = x^4 - 2x^2 + y^2 + 2y + 3$
3	$z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$	**4**	$z = \left(x^2 + y\right)e^{\frac{y}{2}}$
5	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$	**6**	$z = x^3 - y^3 - 3xy$
7	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$	**8**	$z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y$
9	$z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$	**10**	$z = 1 + 2x - 4y - x^2 - y^2$
11	$z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$	**12**	$z = 2xy - 4x - 2y$
13	$z = x^2 + y^2 + 4y - 2x + 4$	**14**	$z = x^2 + y^2 + \frac{\left(x + 2y - 16\right)^2}{5}$
15	$z = x^2 - 2xy + 4y$	**16**	$z = \left(y - x\right)^2 + \left(y + 2\right)^2$
17	$z = e^{\frac{x}{2}}\left(x - y^2\right)$	**18**	$z = xy\left(1 - x - y\right)$
19	$z = x^3 + xy + 6x + y + 1$	**20**	$z = x^2 + xy + y^2 - 2y - 5$

Задание 6. Пользуясь таблицей основных интегралов и правилами интегрирования, найти интегралы.

№ вар.	Интегралы	№ вар.	Интегралы
1	$\int\left(\frac{3}{\sqrt{x^2+5}} - \frac{2+x^2}{x^3} + 4\sqrt[3]{x^2}\right)dx$	**2**	$\int\left(\frac{10}{3-2x^2} + 4e^x - \frac{4-x^2}{2-x}\right)dx$
3	$\int\left(\frac{2}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{5-x}{x^2} - 2\sqrt[4]{x^3}\right)dx$	**4**	$\int\left(\frac{2}{7x^2+2} + 2^x - \frac{x^2-4}{x+2}\right)dx$
5	$\int\left(\frac{7}{3x^2+16} - \frac{x^4+5}{x^5} + 3\sqrt{x}\right)dx$	**6**	$\int\left(\frac{8}{\sqrt{6-x^2}} - 2\sin x + \frac{x^2-25}{x+5}\right)dx$

7	$\int\left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x}-5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$	**8**	$\int\left(\frac{2}{4x^2-3}-\frac{3-x^3}{x^4}+5^x\right)dx$
9	$\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+4e^x\right)dx$	**10**	$\int\left(\frac{5}{6x^2+5}+7^x-\frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$
11	$\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4x^2-1}{x^3}-2\sqrt[8]{x^3}\right)dx$	**12**	$\int\left(\frac{6}{3x^2-5}+\frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\right)dx$
13	$\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}}-\frac{2x^2+10}{x}+4\sqrt[6]{x^5}\right)dx$	**14**	$\int\left(\frac{4}{2-5x^2}+2e^x-\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx$
15	$\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}}+\frac{6+x^3}{x^4}-3\sqrt[8]{x^5}\right)dx$	**16**	$\int\left(\frac{12}{3+2x^2}-3\cos x+\frac{x^2-9}{x-3}\right)dx$
17	$\int\left(\frac{3}{\sqrt{6-x^2}}+\frac{2+x^2}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$	**18**	$\int\left(\frac{7}{5x^2+2}-2\sin x+3^x\right)dx$
19	$\int\left(\frac{6}{\sqrt{4+x^2}}-\frac{3x+x^3}{x^3}+6\sqrt[5]{x^2}\right)dx$	**20**	$\int\left(\frac{4}{5x^2-1}-\frac{1-x^2}{1+x}+5e^x\right)dx$

Задание 7. Проинтегрировать подходящей заменой переменного или подведением под знак дифференциала.

№ вар	Интеграл	Интеграл
1	$\int \cos 2x\,dx$	$\int \frac{xdx}{2x^2+5}$
2	$\int \frac{dx}{\sin^2 8x}$	$\int x\sin(x^2-1)\,dx$
3	$\int \frac{dx}{5x+3}$	$\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$
4	$\int e^{1-5x}\,dx$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-5}}$

5	$\int \frac{dx}{1-3x}$	$\int \frac{\sqrt{\ln x}\,dx}{x}$
6	$\int \cos(1-3x)\,dx$	$\int \frac{\cos x\,dx}{7+\sin^2 x}$
7	$\int \sin 5x dx$	$\int \frac{x^3 dx}{x^8+16}$
8	$\int e^{9x+2} dx$	$\int \frac{\ln x\,dx}{x}$
9	$\int \sin 12x\,dx$	$\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x}$
10	$\int \cos(4x+3)\,dx$	$\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$
11	$\int 10^{2x+1}\,dx$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\int \sin(2-3x)dx$	$\int (2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$
13	$\int e^{1-3x}\,dx$	$\int x(3+x^2)^7\,dx$
14	$\int 5^{3x+2}\,dx$	$\int \frac{x^2 dx}{x^3-3}$
15	$\int \cos 9x\,dx$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$
16	$\int \cos 4x\,dx$	$\int \frac{xdx}{4+x^4}$
17	$\int e^{5x}\,dx$	$\int \frac{xdx}{\sin^2(x^2+1)}$
18	$\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$	$\int x^2(3-x^3)^{10}\,dx$
19	$\int \sin\frac{x}{2}\,dx$	$\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

20	$\int 8^{5x+1}\,dx$	$\int \frac{dx}{x\ln x}$

Задание 8. Проинтегрировать по частям.

№ вар.	**Интегралы**	**№ вар.**	**Интегралы**
1	$\int (3x+2)\ln x\,dx$	**2**	$\int (2x-1)\ln x\,dx$
3	$\int (x-2)\cos 2x\,dx$	**4**	$\int (3-x)\ln x\,dx$
5	$\int (2x+1)e^{3x}\,dx$	**6**	$\int (6-5x)\ln x\,dx$
7	$\int (2x-1)\sin 2x\,dx$	**8**	$\int \operatorname{arctg} x\,dx$
9	$\int (5x+2)\cos 2x\,dx$	**10**	$\int \arcsin x\,dx$
11	$\int (3-4x)e^{x}\,dx$	**12**	$\int \arccos x\,dx$
13	$\int (6x+1)\sin x\,dx$	**14**	$\int \operatorname{arcctg} x\,dx$
15	$\int (5-2x)\cos 3x\,dx$	**16**	$\int x\ln x\,dx$
17	$\int (6-5x)e^{2x}\,dx$	**18**	$\int (4-3x)\ln x\,dx$
19	$\int (x+1)\sin 4x\,dx$	**20**	$\int x\sin 3x\,dx$

Задание 9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

№ вар.	**Уравнения линий**	**№ вар**	**Уравнения линий**
1	$y=3x^2+1, \quad y=3x+7$	11	$y=x^2,\ y=\frac{1}{x},\ x=3$
2	$y=x^3, \quad y=8, \quad x=0$	12	$y=x^2-2,\ y=-x$
3	$y=x^2,\ y=2-x^2$	13	$y=x^2-1,\ y=1-x$
4	$y=x,\ y=1/x,\ x=3$	14	$y=\sin x,\ y=0,\ x=\pi/2$

5	$y=x^2,\ y=x+2$	15	$y=x^2-2,\ y=1-2x$
6	$y=\sqrt{x},\ y=x-2,\ x=0$	16	$y=\dfrac{2}{x},\ y=2x,\ x=2$
7	$y=x^2+1,\ y=x,\ x=0,\ x=2$	17	$y=2x-x^2,\ y=-x$
8	$y=x^2,\ y=3-2x$	18	$y=e^x,\ x=0,\ y=e$
9	$y=x^2-1,\ y=x+5$	19	$y=\sqrt{x},\ y=\dfrac{x}{2}$
10	$y=2-x^2,\ y=-x$	20	$y=2-x^2,\ y=x$

Задание 10. Решить дифференциальные уравнения (ДУ)

Номер варианта	**10.1** Найти общее решение ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными	**10.2** Определить тип ДУ 1-го порядка и решить задачу Коши
1	$4-y^2+xy'=0$	$y'+y\,\mathrm{tg}x=\cos^2 x,\ \ y(0)=-1$
2	$xyy'=1+y^2$	$y'-y^2(x+1)=0,\ \ y(2)=1$
3	$y'+x^3\cos^2 y=0$	$y'+\dfrac{y}{x}=x^2y^2,\ \ y(1)=1$
4	$y'(1+y)=3-x$	$y'=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{\cos\dfrac{y}{x}},\ \ y(e)=0$
5	$y'\sin^2 x=2+y$	$xy^2y'-2+x^2=0,\ \ y(1)=-1$
6	$y'\mathrm{ctg}x+y^2=1$	$y'-2xy=xe^{x^2},\ \ y(0)=-1$
7	$y'-e^{x+y}=0$	$y'-y=-y^2e^x,\ \ y(0)=1$
8	$(1-x^2)y'=2xy^2$	$x^2y^2y'+2=0,\ \ y(2)=-1$
9	$\cos^2 x\cdot y'=\sqrt{1-y^2}$	$y'-\dfrac{y}{x}=\cos^2\dfrac{y}{x},\ \ y(1)=\dfrac{\pi}{4}$
10	$(1+x^2)y'+y=0$	$xyy'-\sqrt{1+y^2}=0,\ \ y(1)=-1$
11	$\sqrt{1+y^2}=x^2yy'$	$xy'-2y=x^3\cos x,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

12	$(4-x^2)y'=2xy^2$	$y'-y(2x+1)=0,\ \ y(1)=e$
13	$\sqrt{2x-3}\cdot y'-\mathrm{ctg}\,y=0$	$y'-y\,\mathrm{tg}x+y^2\cos x=0,\ \ y(0)=1$
14	$x^2y^2\cdot y'-4=0$	$xyy'=y^2+x^2,\ \ y(-1)=2$
15	$y'=\mathrm{tg}2x\cdot(1-y)$	$y'-e^{2x}(4+y^2)=0,\ \ y(0)=2$
16	$xy'=y^2(x+1)$	$y'-y\,\mathrm{ctg}x=\sin^2 x,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$
17	$3-y^2+x^2y'=0$	$y'-y=(x+1)e^x,\ \ y(0)=-1$
18	$y(1-x^2)y'+x=0$	$(2-x^2)y'-2xy^2=0,\ \ y(-1)=1$
19	$xy^2y'=4-x^2$	$(1+x^2)y'=xy,\ \ y(1)=\sqrt{2}$
20	$y'=\frac{1}{y}-y$	$y'-\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x},\ \ y(1)=1$

Задание 11.. Решить ДУ

Номер варианта	Найти общее решение линейных однородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами		
1	$2y''-5y'+2y=0$	$y''-6y'+9y=0$	$y''+2\sqrt{3}y'+4y=0$
2	$y''-2y'-3y=0$	$4y''+4y'+y=0$	$y''-0{,}2y'+2{,}01y=0$
3	$6y''+y'-y=0$	$y''+2y'+y=0$	$16y''-16y'+5y=0$
4	$y''-y'-2y=0$	$9y''+6y'+y=0$	$y''-0{,}2y'+0{,}05y=0$
5	$4y''-5y'+y=0$	$9y''-12y'+4y=0$	$y''+2y'+1{,}16y=0$
6	$5y''+4y'-y=0$	$y''-y'+0{,}25y=0$	$y''+4y'+20y=0$
7	$2y''-y'-3y=0$	$0{,}01y''+0{,}2y'+y=0$	$y''-4y'+13y=0$
8	$y''+2y'-8y=0$	$y''-4y'+4y=0$	$y''-0{,}6y'+4{,}09y=0$
9	$6y''-5y'+y=0$	$y''+10y'+25y=0$	$y''-2y'+3y=0$

10	$3y''-2y'-y=0$	$y''-8y'+16y=0$	$y''+2\sqrt{2}y'+3y=0$
11	$3y''-8y'+4y=0$	$16y''+8y'+y=0$	$y''+0{,}2y'+4{,}01y=0$
12	$y''+4y'+3y=0$	$y''+0{,}6y'+0{,}09y=0$	$y''+2y'+17y=0$
13	$3y''+4y'-4y=0$	$y''-2\sqrt{2}y'+2y=0$	$y''-4y'+8y=0$
14	$4y''+7y'-2y=0$	$y''+0{,}8y'+0{,}16y=0$	$y''-6y'+10y=0$
15	$2y''-y'-6y=0$	$y''-2y'+y=0$	$y''+4y'+13y=0$
16	$5y''+2y'=0$	$y''+y'+0{,}25y=0$	$y''-6y'+13y=0$
17	$y''-y'-6y=0$	$y''+0{,}4y'+0{,}04y=0$	$y''+4y'+5y=0$
18	$4y''-y=0$	$9y''+12y'+4y=0$	$y''-2y'+5y=0$
19	$3y''-5y'+2y=0$	$y''+2\sqrt{3}y'+3y=0$	$y''-4y'+5y=0$
20	$8y''-6y'+y=0$	$y''+1{,}2y'+0{,}36y=0$	$y''-2y'+2y=0$

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

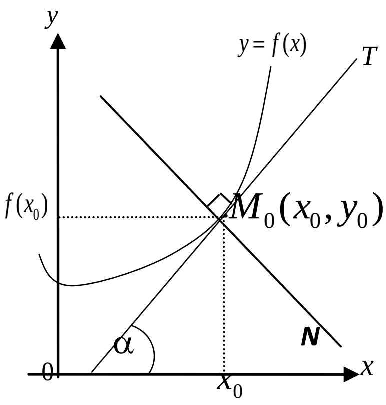
Производная функции и её приложения

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (4.1)$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*. Правила дифференцирования и таблица производных основных элементарных функций представлены в Приложении 1.



<u>Геометрический смысл производной</u>.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{4.2}$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{4.3}$$

<u>Механический смысл производной</u>. Если точка движется по закону $S=s(t)$, где S — путь, t — время, то $S'(t)$ представляет скорость движения точки в момент времени t, т. е. $S'(t) = V(t)$.

Дифференциал первого порядка функции $y = y(x)$ определяется формулой:

$$dy = y'(x)dx, \tag{4.4}$$

т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной. Из формулы (4.4) вытекает еще одна форма записи производной в виде $\dfrac{dy}{dx}$.

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции. Например, производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Задание 1.

1.1. Найти производные 1-го порядка функций *а*), *б*), *в*), и *г*);
1.2. Найти производную 2-го порядка функции *а*)
1.3. Записать дифференциал первого порядка функции а)

$$а)\ y=3x^5+\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{x^3};\ б)\ s=(e^t-2\ln t)\sin t;\ в)\ u=\operatorname{ctg}^3\frac{v}{3};\ г)\ z=\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}.$$

Решение.

1.1 *а*) Используя правила I, III и формулу 3 таблицы производных, получим:

$$y'=(3x^5+\sqrt[3]{x^2}-4/x^3)'=3(x^5)'+(x^{2/3})'-4(x^{-3})'=$$
$$=3\cdot 5x^4+\frac{2}{3}x^{-1/3}-4(-3x^{-4})=15x^4+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы 5, 7, 8 (Прил.1) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t'=1, получим:

$$s=[(e^t-2\ln t)\sin t]'=(e^t-2\ln t)'\sin t+(e^t-2\ln t)(\sin t)'=$$
$$((e^t)'-2(\ln t)')\sin t+(e^t-2\ln t)\cos t=\left(e^t-\frac{2}{t}\right)\sin t+(e^t-2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. v'=1; используя формулы 3, 11 и 2 (Прил.1) получим:

$$u'=\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right]=2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)'=2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right)=$$
$$=2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right)=-\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}}=-\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы 3 и 14 (Прил.1), учитывая, что t'=1, получим:

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg} 2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg} 2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg} 2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\operatorname{arctg} 2t}{(1+4t^2)^2}.$$

1.2 В пункте 3.1 *а*) нашли производную 1-го порядка данной функции:

$$y' = 15x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} + 12x^{-4}.$$

Найдём производную второго порядка $y'' = (y')'$:

$$y'' = \left(15x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} + 12x^{-4}\right)' = 15(x^4)' + \frac{2}{3}(x^{-1/3})' + 12(x^{-4})' =$$

$$= 15\cdot 4x^3 + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} + 12(-4x^{-5}) = 60x^3 - \frac{2}{9x\sqrt[3]{x}} - \frac{60}{x^5}.$$

1.3 Запишем дифференциал функции *а*). Согласно формуле (5.4) получим:

$$dy = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3})'dx \quad \Rightarrow \quad dy = (15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4})dx.$$

Использовали результат нахождения производной функции *а*) в пункте 3.1

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x^2-3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Используем уравнения касательной (4.2) и нормали (4.3):

1) $y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2-3} = 1;$

2) $y'(x) = ((x^2-3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-3)' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}};$

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2-3}} = 2.$$

Подставим x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y = 1 + 2(x-2)$, или $2x - y - 3 = 0$ — уравнение касательной.

$y = 1 - \frac{1}{2}(x-2)$, или $x + 2y - 4 = 0$— уравнение нормали.

Исследование функций и построение графиков

Приведём общую схему исследования и построения графика функции.

1. **<u>Область определения функции (о.о.ф.)</u>**. *Областью определения D(f) функции* $y = f(x)$ называется множество всех $x \in X$ таких, что выражение $f(x)$ имеет смысл, т. е. взяв любое $x \in X$ и подставив в $f(x)$ можно найти соответствующее значение функции $f(x)$.

2. **<u>Область непрерывности функции.</u>** Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x \to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Функция называется непрерывной на некотором промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

3. **<u>Чётность, нечётность функции.</u>** Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если $f(-x) = f(x)$, её график симметричен относительно оси OY. Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если $f(-x) = -f(x)$, её график симметричен относительно начала координат. Остальные функции называются *функциями общего вида*.

4. **<u>Точки пересечения графика функции с осями координат.</u>** Пересечение с осью OY $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$; пересечение с осью OX $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0. \end{cases}$

5. **<u>Асимптоты графика функции.</u>** Асимптотой кривой $y = f(x)$ называется прямая l, такая, что расстояние точки $(x, f(x))$ от этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки по кривой от начала координат. Различают вертикальные и наклонные асимптоты. Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если x_0 есть точка бесконечного разрыва функции, т. е. если хотя бы один из

односторонних пределов функции $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$. Прямая $y = kx + b$ есть наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$, если $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - x]$, причем оба предела существуют и конечны.

6. <u>Интервалы монотонности и точки локального экстремума функции</u>. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на (a, b) ($f(x) \nearrow$), если для $x_2 > x_1 \in (a,b)$ $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $f(x)$ называется *убывающей* на (a, b) ($f(x) \searrow$), если для $x_2 > x_1 \in (a,b)$ $f(x_2) < f(x_1)$. Функция называется монотонной на (a, b), если $f(x)$ только $\nearrow$ или только $\searrow$ на (a, b). Если для всех $x \in (a,b)$ $f'(x) > 0$, то $f(x) \nearrow$ на (a, b). Если для всех $x \in (a,b)$ $f'(x) < 0$, то $f(x) \searrow$ на (a, b). Точка $x = x_0$ называется точкой локального максимума (max), [минимума (min)] функции $f(x)$, если существует некоторый интервал (α, β), содержащий точку x_0 такой, что для всех $x \in (\alpha, \beta)$ $f(x) < f(x_0)$ $[f(x) > f(x_0)]$ $(x \in (\alpha, \beta)$ $x \neq x_0)$. Точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума функции.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 точка локального экстремума непрерывной функции $f(x)$, то её первая производная $f'(x)$ в точке x_0 или равна нулю, или не существует.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются *критическими точками*.

Первое достаточное условие экстремума: если при переходе через критическую точку x_0 знак $f'(x)$ изменился с «+» на «–», то в точке x_0 локальный максимум;

с «–» на «+», то в точке x_0 локальный минимум;

если знак $f'(x)$ не изменился, то в точке x_0 экстремума нет.

7. <u>Интервалы выпуклости функции, точки перегиба.</u> Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* $(\cap)$ [*вниз* $\cup$] на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ выполняется неравенство:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2};\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right].$$

Точки, разделяющие интервалы выпуклости, называются *точками перегиба*.

Если $f''(x)>0$ всюду на (a, b), то функция $f(x)$ выпукла вниз ($\cup$) на (a, b).

Если $f''(x)<0$ всюду на (a, b), то функция $f(x)$ выпукла вверх ($\cap$) на (a, b).

8. **<u>Построение графика</u>**. Для построения графика можно взять несколько дополнительных точек.

Задание 3. Построить график функции $y=x^3+3x^2+1$, используя общую схему исследования функции.

Решение.

1. Функция $\underline{y=x^3+3x^2+1.}$ определена для любого x, т.е. о.о.ф. $D(y)=\mathrm{R}$, $x\in\mathrm{R}$ или $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

2. Так как функция $f(x)=x^3+3x^2+1$ определена на всей числовой оси, то она и непрерывна для любого $x\in(-\infty;+\infty)$. Точек разрыва нет.

3. $\begin{cases} f(-x)=(-x)^3+3x^2+1\neq f(x) \\ -f(x)=-x^3-3x^2-1\neq f(-x)\end{cases}\Rightarrow f(x)-$ функция общего вида.

4. $\begin{cases} y=x^3+3x^2+1 \\ x=0\end{cases}\Rightarrow A(0,1);\quad \begin{cases} y=x^3+3x^2+1 \\ y=0\end{cases}\Rightarrow x^3+3x^2+1=0.$

Точки пересечения с осью OX искать не будем, поскольку для этого необходимо решать кубическое уравнение.

5. Т. к. функция $f(x)=x^3+3x^2+1$ не имеет точек разрыва, то вертикальных асимптот у графика функции нет. Найдём наклонные асимптоты:

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}[x^2+3x+1/x]=(\infty+\infty+0)=\infty.$ Наклонных асимптот нет.

6. Определим критические точки: $\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+6x \\ f'(x)=0.\ 3x^2+6x=0\Rightarrow x_1=0\ \ x_2=-2.\end{array}$

О.о.ф. найденными критическими точками разбиваем на интервалы и определяем знак $y'(x)$ внутри каждого интервала:

$y'(-3)=3\cdot(-3)(-3+2)=9>0;\ y'(-1)=3\cdot(-1)(-1+2)=-3<0;\ y'(1)=3\cdot1(1+2)=9>0.$

Результаты оформим в виде таблицы:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2;\,0)$	0	$(0,+\infty)$
$y'(x)$	+	0	–	0	+
$y(x)$	$\nearrow$	$\nearrow\searrow$ max	$\searrow$	$\searrow\nearrow$ min	$\nearrow$

$y_{\max}=y(-2)=(-2)^3+3(-2)^2+1=5;\ \ y_{\min}=y(0)=1.$

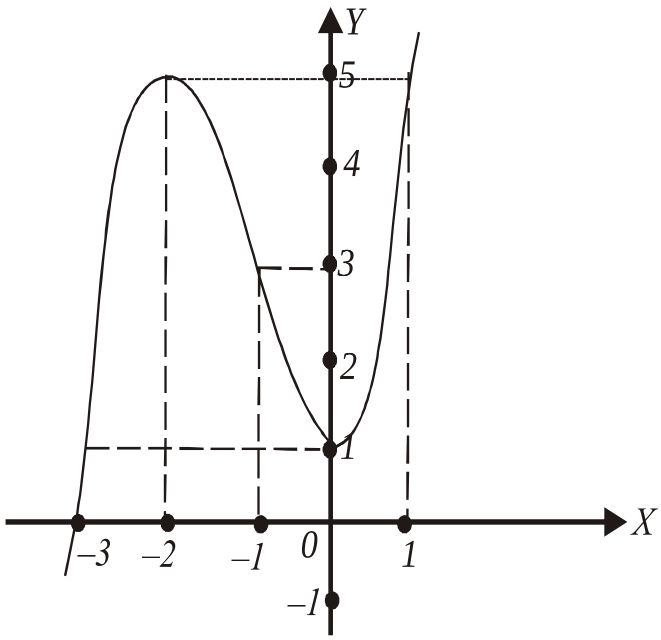
7. Определим точки, подозрительные на перегиб: $y''=(3x^2+6x)'=6x+6;$
$y''=0.\ \ 6x+6=0\Rightarrow x=-1.$

О.о.ф. найденными точками разбиваем на интервалы, определяем знак $f''(x)$ внутри каждого интервала: $y''(-2)=6(-2)+6=-6<0; y''(0)=6>0.$ Результаты оформим в виде таблицы:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$y''(x)$	–	0	+
$y(x)$	$\cap$	$\cup\cap$	$\cup$

$y_{\text{пер}}=y(-1)=(-1)^3+3(-1)^2+1=3.$

8. Построим график функции, учитывая все полученные данные, также используем две дополнительные точки (–3,1), (1, 5).



Функция нескольких переменных. Частные производные

Переменная величина z называется *функцией двух независимых переменных* x и y: $z = f(x, y)$ (или функцией точки $M(x,y)$: $z = f(M)$), заданной на множестве D, если по некоторому закону каждой паре $(x,y) \in D$ (каждой точке $M \in D$) соответствует определенное значение z.

Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде $z = f(x, y)$ или $z = f(M)$, или $z = z(x, y)$. Множество D называется *областью определения* функции $f(x,y)$ и обозначается $D(f)$. Она находится из двух условий:

1) В множество D включаются все точки плоскости OXY, где выражение $f(x,y)$ определено, т. е. имеет смысл.

2) Если функция $f(x,y)$ получена для некоторой физической задачи, то учитывается смысл переменных x и y.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области $D \subset \mathbb{R}^2$ и $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Дадим аргументу x произвольное приращение Δx и аргументу y — приращение Δy так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$.

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется разность $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Частные приращения функции $f(x, y)$ по переменным x и y равны соответственно:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \quad y = y_0 = \text{const},$$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0), \quad x = x_0 = \text{const}.$$

Частными производными функции $z(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по x и по y называются пределы вида:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y},$$

если они существуют и конечны.

Другие обозначения частных производных функции $z = f(x,y)$:

$$z'_x,\ z'_y \text{ или } f'_x,\ f'_y, \text{ или } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Если необходимо, в скобках указывается точка (x_0, y_0), в которой вычислены частные производные:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \text{ или } z'_x(x_0, y_0) \text{ и т. д.}$$

Из определения частных производных следует правило их нахождения: частная производная по x есть обыкновенная производная по x функции f (x, y), вычисленная при условии, что y = const. При этом используются правила и формулы дифференцирования функции одной переменной (Прил. 1).

Аналогично, если $u = u(x, y, z)$, то u'_x вычисляют при y, z = const, u'_y — при x, z = const, u'_z при x, y = const.

Задание 4. Найти частные производные первого порядка функций

$$a)\ z = x^4 \cdot \sqrt{xy} - \frac{x}{y^2}.$$

Решение.

$z = x^4 \cdot \sqrt{xy} - \dfrac{x}{y^2}$, $z'_x = ?$ $z'_y = ?$ Функцию z запишем в виде, удобном для дифференцирования: $z = x^4 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2} = x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2}$.

Используя правила I, III и формулу 3 (Прил.1), дифференцируем по x, считая y = const:

$$z'_x = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2})'_x = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}})'_x - (xy^{-2})'_x = y^{\frac{1}{2}} (x^{\frac{9}{2}})'_x - y^{-2}(x)'_x =$$

$$= y^{\frac{1}{2}} \frac{9}{2} x^{\frac{7}{2}} - y^{-2} = \frac{9}{2}\sqrt{x^7 y} - \frac{1}{y^2}.$$

Дифференцируем по y (x = const):

$$z'_y = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2})'_y = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}})'_y - (xy^{-2})'_y = x^{\frac{9}{2}} (y^{\frac{1}{2}})'_y - x(y^{-2})'_y =$$

$$= x^{\frac{9}{2}} \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - x(-2)y^{-3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^9}{y}} + \frac{2x}{y^3}.$$

Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z = Z(x, y)$ определена в некоторой области D и $M_0(x_0, y_0)$— внутренняя точка области.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $z = Z(x, y)$, если существует окрестность точки M_0 такая, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство:

$Z(x_0, y_0) \geq Z(x, y) \quad \left(Z(x_0, y_0) \leq Z(x, y)\right).$

Точки (локального) максимума и минимума функции называются точками *экстремума*.

Необходимое условие экстремума дает следующая теорема.

Теорема. Пусть (x_0, y_0) — точка экстремума дифференцируемой функции $z = Z(x, y)$. Тогда частные производные

$$Z'_x(x_0, y_0) = 0 \text{ и } Z'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{11}$$

Другими словами, $\operatorname{grad} Z(M_0) = \overline{0}$.

Точку M_0, в которой выполнены условия (11), называют *стационарной* точкой функции.

Экстремум функции возможен не только в её стационарных точках, но и в таких точках, в которых $\operatorname{grad} Z$ не существует, т. е. не существует хотя бы одна из частных производных Z'_x или Z'_y. Такие точки вместе со стационарными называются *критическими* точками функции.

Не любая критическая точка функции является точкой экстремума. Следующая теорема устанавливает достаточные условия экстремума функции в стационарной точке.

Теорема. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка функции $Z(x, y)$, т. е. $Z'_x(M_0) = 0$ и $Z'_y(M_0) = 0$, и в некоторой окрестности этой точки все частные производные второго порядка функции $Z(x, y)$ непрерывны.

Обозначим:

$$A=Z''_{xx}\left(M_0\right),\ B=Z''_{xy}\left(M_0\right),\ C=Z''_{yy}\left(M_0\right),\ \Delta\left(M_0\right)=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2. \quad (12)$$

Тогда:

1) если $\Delta\left(M_0\right)>0,$ то в точке M_0 функция имеет экстремум: минимум, если $A>0$, и максимум, если $A<0$;

2) если $\Delta\left(M_0\right)<0,$ то в точке M_0 функция не имеет экстремума;

3) если $\Delta\left(M_0\right)=0,$ то вопрос о наличии экстремума требует дополнительного исследования (назовем случай $\Delta=0$ неопределенным).

Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум:

1) найти область определения функции;

2) определить критические точки функции в ее области определения, т. е. точки, в которых частные производные Z'_x и Z'_y равны нулю или не существуют;

3) определить частные производные второго порядка;

4) проверить выполнение достаточных условий экстремума (12) для каждой стационарной точки;

5) вычислить значения функции в точках экстремума.

Задание 5. Исследовать на экстремум функцию $z=2xy-x^2y-xy^2$.

Решение. Исследование функции $Z\left(x,y\right)$ на экстремум проводим согласно вышеуказанному алгоритму.

1. Область определения функции $z=2xy-x^2y-xy^2$ — вся плоскость OXY.

2. $z'_x=\left(2xy-x^2y-xy^2\right)'_x=2y-2xy-y^2;$

$$z'_y=\left(2xy-x^2y-xy^2\right)'_y=2x-x^2-2xy.$$

Обе частные производные определены для любых (x, y). Следовательно, точками, подозрительными на экстремум, могут быть только стационарные точки. Определим их из условий $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} z'_x = 2y - 2xy - y^2 = 0, \\ z'_y = 2x - x^2 - 2xy = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y(2 - 2x - y) = 0, \\ x(2 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим координаты стационарных точек:

$M_0\,(0,\,0)$; $M_1\,(0,\,2)$; $M_2\,(2,\,0)$; $M_3\,(\frac{2}{3},\,\frac{2}{3})$.

3. $z''_{xx} = (2y - 2xy - y^2)'_x = -2y, \quad z''_{xy} = (2y - 2xy - y^2)'_y = 2 - 2x - 2y,$

$z''_{yx} = (2x - x^2 - 2xy)'_x = 2 - 2x - 2y, \quad z''_{yy} = (2x - x^2 - 2xy)'_y = -2x.$

4. Точка $M_0\,(0,\,0)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_0} = 0,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_0} = 2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_0} = 0,$$

$$\Delta(M_0) = AC - B^2 = 0 - 2^2 = -4 < 0.$$

Следовательно, в точке $M_0(0,\,0)$ данная функция экстремума не имеет.

Точка $M_1\,(0,\,2)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_1} = -4,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_1} = -2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_1} = 0,$$

$\Delta(M_1) = AC - B^2 = -4 \cdot 0 - (-2)^2 = -4 < 0 \Rightarrow$ В точке $M_1\,(0,\,2)$ экстремума нет.

Точка $M_2\,(2,\,0)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_2} = 0,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_2} = -2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_2} = -4,$$

$\Delta(M_2) = AC - B^2 = 0 \cdot (-4) - (-2)^2 = -4 < 0 \Rightarrow$ В точке $M_2\,(2,\,0)$ экстремума нет.

Точка $M_3\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_3} = -\frac{4}{3},\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_3} = -\frac{2}{3},\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_3} = -\frac{4}{3},$$

$\Delta(M_3) = AC - B^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow$ В точке M_3 функция имеет экстремум, так как $A = -\frac{4}{3} < 0$, то $M_3\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ — точка максимума функции.

5. $z_{\max} = z\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$

Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$, C — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);\quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$

2. $\int dF(x)=F(x)+C;$ 3. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx,\ k$ — const;

4. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов приведена в Приложении 2. Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Задание 6. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx; \qquad б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$$

Решение.

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{matrix}\right\}=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}=-$$

$$-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{matrix}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{matrix}\right\}=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-$$

$$3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int5^xdx+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=$$

$$=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2/11}\right)^2}+3\int5^xdx+4\int dx-\int x\,dx=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right\}$$

$$=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{2/11}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2/11}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+$$
$$+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Метод замены переменной

Теорема. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (11.1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (11.1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Задание 7. Проинтегрировать подходящей заменой переменной (подведение под знак дифференциала).

а) $\int\cos 4x dx$; *б*) $\int e^{9x+1}dx$; *в*) $\int x(2-x^2)^5 dx.$

Решение:

$$a)\ \int\cos 4x dx=\left|\begin{matrix}t=4x,\ dt=4dx,\\ dx=dt/4\end{matrix}\right|=\int\cos t\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int\cos t dt=\left\{\begin{matrix}\text{формула 7}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right\}=$$
$$=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\sin 4x+C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx = \left| \begin{matrix} t = 9x+1,\ dt = 9dx, \\ dx = dt/9 \end{matrix} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

$$в) \int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{matrix} t = -x^2,\ dt = -2xdx, \\ xdx = -dt/2 \end{matrix} \right| = \int t^5\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^5 dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6 + C.$$

Интегрирование по частям.

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU, \tag{11.3}$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$	$U = P_n(x) \to$ $\to dU = P_n'(x)dx$	$dV = \sin kx\,dx \to V = -\frac{1}{k}\cos kx$ $dV = \cos kx\,dx \to V = \frac{1}{k}\sin kx$ $dV = e^{kx}dx \to V = \frac{1}{k}e^{kx}$

$\int \ln kx\, P_n(x)dx$	$U=\ln kx \to dU=\dfrac{dx}{x}$	
$\int \arcsin kx\, P_n(x)dx$	$U=\arcsin kx \to dU=\dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\, P_n(x)dx$	$U=\arccos kx \to dU=-\dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$dV=P_n(x)dx \to$ $\to V=\int P_n(x)dx$
$\int \operatorname{arctg} kx\, P_n(x)dx$	$U=\operatorname{arctg} kx \to dU=\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \operatorname{arcctg} kx\, P_n(x)dx$	$U=\operatorname{arcctg} kx \to dU=-\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$, где $n=0,1,2,...,$ $a_0\neq 0$.

Задание 8. Проинтегрировать по частям.

а) $\int(3x-1)\sin 2xdx;$ *б*) $\int(1+2x)\ln xdx.$

Решение.

$$а)\ \int(3x-1)\sin 2xdx=\left|\begin{array}{l}U=3x-1\to dU=3dx\\ dV=\sin 2xdx\to V=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{array}\right|=-(3x-1)\frac{\cos 2x}{2}+\int\frac{\cos 2x}{2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C.$$

$$б)\ \int(1+2x)\ln xdx=\left|\begin{array}{l}U=\ln x\to dU=\dfrac{dx}{x}\\ dV=(1+2x)dx\to\\ V=\int(1+2x)dx=x+x^2\end{array}\right|=\ln x(x+x^2)-\int(x+x^2)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x(x+x^2)-\int(1+x)dx=\ln x(x+x^2)-x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), \qquad (5)$$

где $F(x)$— первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Формула (5) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx;$ 2) $\int\limits_a^a f(x)dx=0;$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx;$ 4) $\int\limits_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b g(x)dx;$

5) $\int\limits_a^b Cf(x)dx=C\int\limits_a^b f(x)dx,\ C-\text{const};$

6) Если $f(x)\le g(x)$ для всех $x\in[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx;$

7) Если $m\le f(x)\le M$ для всех $x\in[a,b]$, то $m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a).$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dx, \tag{6}$$

где $\alpha=\psi(a),\ \beta=\psi(b),\ t=\psi(x)$ — обратная к $x=\varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:

$$\int\limits_a^b UdV=UV\Big|_a^b-\int\limits_a^b VdU, \tag{7}$$

Определенный интеграл широко используется в различных приложениях, например, при вычислении площадей плоских фигур, длин дуг плоских кривых, объемов тел вращения, площадей поверхностей вращения, работы переменной силы на отрезке, пути, пройденного за промежуток времемени, статических моментов и моментов инерции плоских дуг и фигур и т. д.

Площади плоских фигур

Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (8)$$

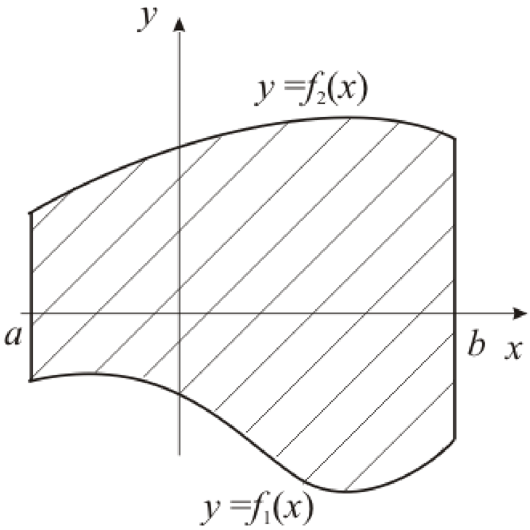


Рис. 1

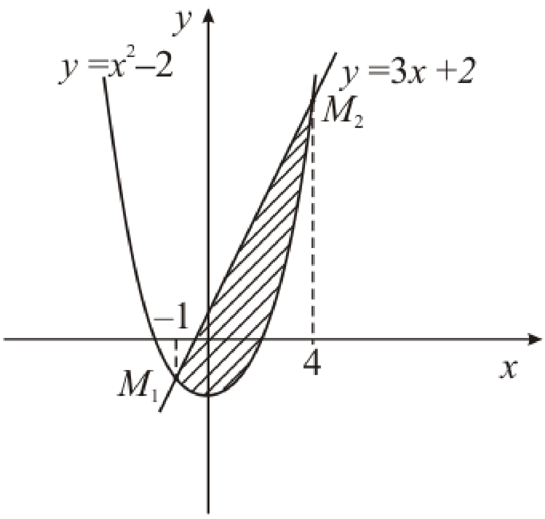


Рис. 2

Задание 9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2, \; y = 3x + 2.$$

Решение. Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0, 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$, $y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$. Итак, $M_1(-1,-1)$, $M_2(4,14)$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой $f_2(x) = 3x + 2$, $f_1(x) = x^2 - 2$, поскольку $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$. Получим:

$$S = \int_{-1}^{4} \left(3x + 2 - \left(x^2 - 2\right)\right) dx = \int_{-1}^{4} \left(3x - x^2 + 4\right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1)\right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \ (\text{кв.ед.})$$

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением (ДУ) 1-го порядка называется уравнение вида:

$$y' = f(x, y), \qquad (1)$$

связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y = y(x)$ и ее первую производную y'. Здесь $f(x, y)$ — некоторая заданная функция своих аргументов, определенная и непрерывная в области D на плоскости XOY. Область D называется областью определения уравнения (ООУ).

Функция $y = \varphi(x)$, определенная и дифференцируемая на некотором интервале (a, b), называется *решением уравнения* (1), если, будучи подставленной в это уравнение, она обращает его в тождество, т. е.

$\varphi'(x) = f\left(x, \varphi(x)\right)$, при $x \in (a, b)$. График решения ДУ называется *интегральной кривой*.

ДУ (1) имеет бесчисленное множество решений вида $y = \varphi(x, C)$, зависящих от одной произвольной постоянной *C*. Такое решение называется *общим решением ДУ*. Решение ДУ (1), которое получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при фиксированном значении *C*, называется *частным решением*.

Не всегда решение ДУ (1) находится в виде $y = \varphi(x)$, иногда оно получается в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, при этом для всех *x* и *y* из некоторой области должно выполняться — $\dfrac{\Phi'_x(x, y)}{\Phi'_y(x, y)} = f(x, y)$. Решение $\Phi(x, y) = 0$ называют интегралом ДУ (1), а уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$ называется *общим интегралом* ДУ (1) в некоторой области $G \in D$, если при надлежащем выборе постоянной *C* оно дает любое решение ДУ (1), график которого содержится в области *G*.

Нахождение всех решений ДУ называется *интегрированием* уравнения.

Далее рассмотрим методы интегрирования основных типов ДУ 1-го порядка.

Уравнения с разделяющимися переменными

Такие ДУ имеют вид:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{2}$$

и решаются следующим образом: так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то уравнение (2) можно записать в виде $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Разделим переменные в полученном равенстве, т. е. при дифференциале *dy* соберем множителями функции, зависящие от *y*, а при дифференциале *dx* — функции, зависящие от *x*. Для этого умножим обе части уравнения (2) на множитель $\frac{dx}{f_2(y)}$, считая $f_2(y)\neq 0$. Символически это записывается так:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y)\quad\left|\cdot\frac{dx}{f_2(y)}\right.\quad (f_2(y)\neq 0).$$

Получим $\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx$. Интегрируя последнее равенство, получим общий интеграл

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C.$$

В случае, если уравнение $f_2(y)=0$ имеет решение y = b, которое не получается из общего решения ни при каком значении постоянной C, то y = b является особым решением уравнения (2).

Задание 10.1. Найти общее решение ДУ

$$\sqrt[4]{x}\cdot y'=y+1.$$

Решение. ДУ приведем к виду (2), разделив обе части равенства на $\sqrt[4]{x}$:

$$y'=\frac{y+1}{\sqrt[4]{x}},\quad \text{ООУ}\quad x\neq 0.$$

Согласно описанному выше алгоритму, заменив y' на $\frac{dy}{dx}$, получим $\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{\sqrt[4]{x}}$ и умножим обе части равенства на $\frac{dx}{y+1}(y+1\neq 0)$:

$$\frac{dy}{y+1}=\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.\tag{3}$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$\int\frac{dy}{y+1}=\left|\begin{matrix}u=y+1\\ du=dy\end{matrix}\right|=\int\frac{du}{u}=\left|\begin{matrix}\text{формула 4}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right|=\ln|u|+C=\ln|y+1|+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}=\int x^{-\frac{1}{4}}dx=\left|\begin{matrix}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right|=\frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+C=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C.$$

Для удобства таблица основных интегралов приведена в приложении 1.

Вернемся к равенству (3), оставив константу C только в правой части в виде $\ln|C_1|$:

$$\ln|y+1| = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \ln C_1.$$

Используя свойства логарифмов, получим: $y+1 = C_1 e^{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow y = C_1 e^{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}} - 1$ — общее решение исходного ДУ.

Проверим, имеет ли уравнение особые решения. Уравнение делили на $y + 1$, поэтому могли потерять решение $y = -1$. Подстановка в уравнение показывает, что $y = -1$ — решение, однако оно содержится в общем решении при $C_1 = 0$. Таким образом, особых решений нет.

Однородные уравнения

Однородные ДУ 1-го порядка имеют вид:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{4}$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены $y = zx$, где $z = z(x)$. Действительно, подставляя в уравнение (4) $y' = z'x + z$, получаем: $z'x + z = f(z)$ — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dz}{dx}x = f(z) - z \left| \cdot \frac{dx}{(f(z)-z)\cdot x}, \quad f(z) - z \neq 0, \quad x \neq 0, \right.$$

$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{f(z)-z} = \ln|x| + C.$$

После вычисления интеграла вместо z нужно подставить $\frac{y}{x}$ и, если можно, упростить полученное выражение.

Пример. Найти общее решение ДУ

$$xy' = y + \frac{x}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Решение. Разделим уравнение на $x \neq 0$ ($x = 0$ не принадлежит ООУ) и получим: $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}$ — однородное уравнение вида (4) в котором $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Делаем замену $y = z \cdot x,\ z' = z'x + z$. Тогда исходное уравнение становится уравнением с разделяющимися переменными:

$$z' \cdot x + z = z + \frac{1}{\ln z},\ \ \frac{dz}{dx}x = \frac{1}{\ln z}\,\Bigg|\cdot\frac{dx \cdot \ln z}{x},$$
$$\ln z\,dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \ln z\,dz = \int \frac{dx}{x}.$$

Найдем интегралы в левой и правой частях полученного равенства:

$$\int \ln z\,dz = \left|\begin{array}{l}\text{используем формулу интегрирования}\\ \text{по частям } \int u\,dv = uv - \int v\,du,\\ \text{где } u = \ln z \to du = \dfrac{dz}{z}\\ dv = dz \to v = z\end{array}\right| = z\ln z - \int z\frac{dz}{z} = z\ln z - z + C.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \left|\begin{array}{l}\text{формула 4}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right| = \ln|x| + C.$$

Итак, получим:

$z\ln z - z = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = \ln|x| + C$ — общий интеграл исходного ДУ.

Линейные уравнения

Линейные ДУ 1-го порядка имеют вид:

$$y' + p(x)\cdot y = q(x), \tag{5}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — известные функции, непрерывные на некотором интервале.

Такие уравнения обычно решают методом Бернулли, который состоит в следующем. Решение ищется в виде произведения двух функций $y(x)=U(x)V(x)$. Тогда $y'=U'V+UV'$. Подставляя *y* и y' в (5), получим:

$$U'V+UV'+p(x)UV=q(x).$$

Объединим второе и третье слагаемые в левой части последнего уравнения, вынося *U* за скобки, и получим:

$$U'V+U(V'+p(x)V)=q(x). \qquad (6)$$

Поскольку одну неизвестную функцию *y* заменили двумя функциями *U* и *V*, то одну из этих функций можем взять произвольно. Выберем функцию *V*(*x*) так, чтобы она была решением уравнения

$$V'+p(x)V=0, \qquad (7)$$

тогда вторая функция *U*(*x*) должна удовлетворять уравнению

$$U'V=q(x). \qquad (8)$$

Решив уравнение с разделяющимися переменными (7), найдем *V* и подставим его в (8), откуда найдем *U*. Общее решение получим как произведение найденных функций *U* и *V*:

$$y=UV.$$

Пример. Найти общее решение ДУ:

$$y'+2y=e^{-x}$$

Решение. Уравнение имеет вид (5), поэтому является линейным. Решим его методом Бернулли. Сделаем замену $y=UV$, $y'=U'V+UV'$:

$$U'V+UV'+2UV=e^{-x},$$
$$U'V+U(V'+2V)=e^{-x}.$$

Приравняем коэффициент при *U* к нулю и получим: $\begin{cases} V'+2V=0, \\ U'V=e^{-x}. \end{cases}$

Решим первое из полученных уравнений:

$\dfrac{dV}{dx}=-2V \left| \cdot\dfrac{dx}{V} \right. \Rightarrow \int\dfrac{dV}{V}=-2\int dx \Rightarrow \ln|V|=-2x \Rightarrow V=e^{-2x}$ (при интегрировании использовали формулы 4 и 2 таблицы интегралов). При нахождении *V* постоянную C полагаем равной нулю, так как в данном случае достаточно найти некоторое решение.

Полученную функцию $V = e^{-2x}$ подставим во второе уравнение:

$U'e^{-2x} = e^{-x} \Rightarrow U' = e^{x} \Rightarrow \frac{dU}{dx} = e^{x} \Big| \cdot dx \Rightarrow \int dU = \int e^{x} dx \Rightarrow U = e^{x} + C$ (использовали формулы 2 и 7 таблицы интегралов).

Таким образом, $y = UV = \left(e^{x} + C\right)e^{-2x}$ или $y = e^{-x} + Ce^{-2x}$ — общее решение исходного ДУ.

Уравнения Бернулли

Уравнения Бернулли имеют вид:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \text{где } \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1. \tag{9}$$

Метод решения таких уравнений тот же, что и для линейных уравнений.

Пример. Найти общее решение ДУ: $xy' + 2y = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

Решение. Разделим уравнение на $x \neq 0$ ($x = 0$ не является решением данного ДУ):

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{x\cos^2 x}.$$

Полученное уравнение имеет вид (9), следовательно, это уравнение Бернулли. Сделаем замену $y = UV$, $y' = U'V + UV'$. Получим:

$$U'V + UV' + \frac{2UV}{x} = \frac{2\sqrt{UV}}{x\cos^2 x},$$
$$U'V + U\left(V' + \frac{2V}{x}\right) = \frac{2\sqrt{UV}}{x\cos^2 x}.$$

Приравняем коэффициент при U нулю и получим: $\begin{cases} V' + \frac{2V}{x} = 0, \\ U'V = \frac{2\sqrt{UV}}{x\cos^2 x}. \end{cases}$

Решим первое уравнение:

$\frac{dV}{dx} = -\frac{2V}{x} \Big| \cdot \frac{dx}{V} \Rightarrow \int \frac{dV}{V} = -2\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|V| = -2\ln|x| \Rightarrow V = x^{-2} \Rightarrow V = \frac{1}{x^2}$

(использовали формулу 4 таблицы интегралов).

Подставим полученную функцию V во второе уравнение:

$$U'\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{2\sqrt{\frac{U}{x^2}}}{x\cos^2 x}\Rightarrow\frac{U'}{x^2}=\frac{2\sqrt{U}}{x^2\cos^2 x}\Big|\cdot x^2\Rightarrow U'=\frac{2\sqrt{U}}{\cos^2 x}\Rightarrow\frac{dU}{dx}=\frac{2\sqrt{U}}{\cos^2 x}\Bigg|\cdot\frac{dx}{2\sqrt{U}}\left(\sqrt{U}\neq 0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int\frac{dU}{\sqrt{U}}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}\Rightarrow\sqrt{U}=\mathrm{tg}x+C\Rightarrow U=\left(\mathrm{tg}x+C\right)^2$$

(использовали формулы 3a и 9 таблицы интегралов).

Таким образом, общее решение ДУ:

$$y=\frac{\left(\mathrm{tg}x+C\right)^2}{x^2}.$$

Случай $V = 0$ и $\Rightarrow y = 0$ является решением ДУ, и так как оно не может быть получено из общего решения, то является особым решением.

Все рассмотренные типы ДУ 1-го порядка и методы их решения включены в таблицу ДУ 1-го порядка (см. прил. 2).

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Задача Коши для ДУ 1-го порядка состоит в следующем: из общего решения $y=\varphi(x,C)$ требуется выделить такое решение $y=\varphi(x,C_0)$ уравнения (1), которое удовлетворяет начальному условию: $\varphi(x_0)=y_0$, где (x_0,y_0) — заданная точка плоскости XOY. Условия существования и единственности решения задачи Коши сформулированы в следующей теореме.

Теорема. *Если функция* $y=f(x,y)$ *определена и непрерывна в некоторой области* D *на плоскости* XOY*, а частная производная* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *ограничена в этой области, то каковы бы ни были числа* x_0,y_0*, такие, что точка* $M(x_0,y_0)\in D$*, найдется единственная функция* $y=\varphi(x)$*, являющаяся решением уравнения (1), непрерывно дифференцируемая на некотором промежутке, содержащем точку* x_0*, и такая, что* $\varphi(x_0)=y_0$.

Задание 10.2. Определить тип ДУ и решить задачу Коши

$$y+\sqrt{x^2+y^2}-xy'=0,\;\; y(3)=4.$$

Решение. Для определения типа ДУ выразим из уравнения y':

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x},\;\; (x\neq 0).$$

Внесем x под знак корня, возведя его в квадрат: $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}}$

и в подкоренном выражении поделим почленно числитель на знаменатель, получим

$$y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad (10)$$

Итак, привели уравнение к виду $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. По таблице ДУ (см. Прил. 3) определяем, что уравнение однородное и решается заменой $z=\dfrac{y}{x},\;\; y=zx,$ $y'=z'x+z.$ Сделаем замену в уравнении (10): $z'x+z=z+\sqrt{1+z^2},$ учтем, что $z'=\dfrac{dz}{dx}\Rightarrow\dfrac{dz}{dx}x=\sqrt{1+z^2}\left|\cdot\dfrac{dx}{x\sqrt{1+z^2}}\right.,\; \left(\sqrt{1+z^2}\neq 0\right),\; \dfrac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\dfrac{dx}{x}.$

Используя формулы 12 и 4 таблицы интегралов, получаем:

$$\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|=\ln|x|+\ln C.$$

Произвольную постоянную интегрирования выразили в виде $\ln C$, что позволило записать общее решение, используя свойства логарифмов, в виде:

$$z+\sqrt{1+z^2}=Cx.$$

Учитывая выполненную замену $z=\dfrac{y}{x}$, получим $\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=xC$ — общее решение ДУ в неявном виде.

Найдем такое решение, которое удовлетворяет начальному условию $y(3)=4$. Для этого подставим в общее решение $x=3,\; y=4$ и найдем значение постоянной C:

$$\frac{4}{3}+\sqrt{1+\frac{16}{9}}=3C \Rightarrow \frac{4}{3}+\frac{5}{3}=3C \Rightarrow 3=3C \Rightarrow C=1.$$

Итак, нашли значение постоянной *С*, при котором решение ДУ будет удовлетворять указанному начальному условию.

Решение задачи Коши запишем, подставив в общее решение значение постоянной *С*:

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=x.$$

Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее первую и вторую производные. В общем случае такое уравнение имеет вид:

$$F(x,y,y',y'')=0. \qquad (11)$$

Общее решение уравнения (11) должно содержать две произвольные постоянные, т. е. иметь вид $y=\varphi(x,C_1,C_2)$. Задача Коши для ДУ 2-го порядка формулируется таким образом: найти такое решение уравнения, которое удовлетворяло бы условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, где x_0, y_0, y'_0 — заданные числа.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейные однородные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$y''+p_1y'+p_2y=0, \qquad (15)$$

где p_1 и p_2 — действительные числа.

Согласно теореме о структуре общего решения линейного однородного ДУ достаточно найти два линейно независимых частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (15), чтобы записать общее решение:

$$y_{00}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$$

Будем искать решение уравнения (15) в виде $y=e^{\lambda x}$, где λ — некоторое постоянное. Чтобы определить λ, подставим y, y', y'' в уравнение (15). В результате подстановки получим уравнение $e^{\lambda x}\left(\lambda^2+p_1\lambda+p_2\right)=0.$

Так как $e^{\lambda x}\neq 0,$ то

$$\lambda^2+p_1\lambda+p_2=0. \tag{16}$$

Квадратное уравнение (16) называют *характеристическим уравнением* для ДУ (15), а его корни λ_1 и λ_2 *характеристическими числами*. При решении характеристического уравнения (16) могут возникнуть три случая:

а) Корни λ_1 и λ_2 действительные и различные. Тогда общее решение уравнения (15) будет иметь вид:

$$y_{00}=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}. \tag{17}$$

б) Корни λ_1 и λ_2 действительные и равные, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda.$ Общее решение уравнения (15) будет иметь вид:

$$y_{00}=e^{\lambda x}\left(C_1+C_2x\right). \tag{18}$$

в) Корни λ_1 и λ_2 комплексно сопряженные, $\lambda_{1,2}=a\pm ib.$ Тогда общее решение уравнения (15) примет вид:

$$y_{00}=e^{ax}\left(C_1\cos bx+C_2\sin bx\right). \tag{19}$$

Задание 11. Найти общие решения линейных однородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

а) $4y''+9y'+2y=0;$ $y''-10y'+25y=0;$ в) $y''-2y'+17y=0;$

Решение.

а) $4y''+9y'+2y=0.$ Составим характеристическое уравнение:

$$4\lambda^2+9\lambda+2=0.$$

Решим его, используя формулу корней квадратного уравнения:

$$a\lambda^2+b\lambda+C=0,\ \ \lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{20}$$

Получим корни:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot4\cdot2}}{2\cdot4}=\frac{-9\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{-9\pm7}{8};$$

$$\lambda_1=\frac{-9-7}{8}=-2,\quad \lambda_2=\frac{-9+7}{8}=-\frac{1}{4}.$$

Поскольку $\lambda_1,\ \lambda_2\in R$ и $\lambda_1\neq\lambda_2,$ то общее решение запишем в виде (17):

$$y_{00}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-\frac{x}{4}}.$$

б) $y''-10y'+25y=0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2-10\lambda+25=0,$

его корни найдем по формулам (20):

$$\lambda_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot1\cdot25}}{2}=\frac{10\pm0}{2}=5.$$

Поскольку $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\in R,$ то общее решение запишем в виде (18):

$$y_{00}=e^{5x}\left(C_1+C_2x\right).$$

в) $y''-2y'+17y=0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2-2\lambda+17=0,$

его корни найдем по формуле (20):

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot17}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{-64}}{2}=\frac{2\pm8i}{2}=1\pm4i.$$

Получили комплексно сопряженные корни вида $\lambda_{1,2}=a\pm ib,$ где a = 1, b = 4.

Решение запишем в виде (19):

$$y_{00}=e^{x}\left(C_1\cos4x+C_2\sin4x\right).$$

Список теоретических вопросов

Производная функции одной переменной

1. Приращение аргумента и приращение функции. Задача о касательной к плоской кривой.
2. Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой.
3. Основные правила и формулы дифференцирования.
4. Производные и дифференциалы высших порядков.

Приложения производной

1. Монотонность функции, достаточное условие монотонности.2.

2. Определение локального максимума (минимума) функции, экстремума функции.
3. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции, непрерывной функции.
4. Достаточный признак экстремума.
6. Выпуклость функции, точки перегиба. Достаточное условие выпуклости функции.
7. Достаточное условие точки перегиба. Необходимое условие

Функции двух переменных

1. Определения функций 2-х, область определения и способы задания.
2. График функции 2-х переменных. Линии и поверхности уровня.
3. Частные и полные приращения функции 2-х переменных. Частные производные, их геометрический смысл.
4Скалярное поле, его эквипотенциальные поверхности. Производная по направлению.
5. Градиент функции скалярного поля. Теорема о проекции вектора градиента на направление.
6. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных частных производных.
7. Экстремум функции двух переменных, его необходимое условие (теорема).
8. Достаточные условия экстремума функции двух переменных (теорема).

Неопределенный интеграл (НИ)

1.Первообразная. Теорема о первообразной. НИ, его геометрический смысл.
2. Свойства НИ.
3. Таблица основных интегралов.
4. Теорема о замене переменной в НИ.
5. Интегрирование по частям в НИ.

Определенный интеграл

1. Интегральная сумма. Определение определенного интеграла и его геометрический смысл. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Формула Ньютона–Лейбница.
2. Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора.
3. Объем тела вращения вокруг оси OX.

Дифференциальные уравнения

1. Понятие дифференциального уравнения (ДУ) и его порядка. Понятие общего и частного решений. ДУ с разделяющимися переменными.
2. ДУ 1-го порядка в однородных функциях. Линейные ДУ первого порядка. Уравнение Бернулли. Линейные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Учебно-методические материалы и программно-информационное обеспечение

№ п/п	Автор	Название	Издатель-ство	Год изда ния	Вид изда ния	Адрес электрон ного ресурса	Вид доступа
1	2	3	4	5	6	8	9
1.1	Бермант А.Ф., Араманович И.Г.	Краткий курс математического анализа	СПб: Лань	2008	Учебное пособие		
1.2	Владимирский Б.М., Горстко	Математика общий курс	СПб: Лань	2008	учебник		
1.3	Данко П.Е. Попов А.Г.	Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1	М.: Мир и Об-разование	2015 2009 2008 2007	Учебное пособие		
1.4	Данко П.Е. Попов А.Г.	Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2	М.: ОНИКС: Мир и Об-разование	2015 2009 2008 2007	Учебное пособие		
2.1	Шипачёв В.С.	Высшая математика	М: Юрайт	2011 2012	Учебное пособие		
2.2	Виленкин И.В.	Высшая математика: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное и интегральное исчисление	Ростов н/Д: Феникс	2011	Учебник		
2.3	Виленкин И.В.	Высшая математика: интегралы по мере, дифференциальные уравнения, ряды	Ростов н/Д: Феникс	2011	Учебник		
2.4	Кузнецов Б.Т	Математика	М.: ЮНИТИ-ДАНА	2012	учебник	http://iprbookshop.ru	С любой точки доступа для авторизованного поль-зователя
2.5	Полтинни	Высшая	Ростов	2012	Уче		

	ков В.И.	математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.1	н/Д: ИЦ ДГТУ		бное посо бие		
2.6	Полтинни ков В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.2	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2013	Уче бное посо бие		
2.7	Полтинни ков В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.3	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2014	Уче бное посо бие		
6.2.10	Полтинни ков В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.4	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2015	Уче бное посо бие		
2.8	Пожарски й Д.А., Нурутдин ова И.Н.	Избранные главы математики: интегральное исчисление, дифференциальны е уравнения	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2014	Уче бное посо бие		
2.9	Нурутдин ова И.Н., Соболев В.В.	Сборник образцов решения заданий базового уровня по дисциплине «Математика»	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2013	Уче бное посо бие	ntb.don stu.ru	С любой точки доступа для авторизова нного поль-зователя
3.1		Сайт Math Высшая математика. Решение задач и примеров – online				http://www.math-pr.com/index.html	С любой точки доступа
3.2		Сайт Решение задач по математике online				http://www.reshmat.ru/index.html	С любой точки доступа

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)],\ y' = f_u' \cdot u_x'$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	**VII**	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ y_x' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_t'}{x_t'}.$
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u',\quad c = \text{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},\ (v(x) \neq 0)$	**VIII**	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x_y' = \dfrac{1}{y_x'},\ (y_x' \neq 0)$.
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2},\quad c = \text{const}\quad (v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция	№ пп	
1	$c' = 0$	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	**10**	$(\text{tg}\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**11**	$(\text{ctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad \lvert u \rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad \lvert u \rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}\quad (u > 0)$	**14**	$(\text{arctg}\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}\quad (u > 0)$	**15**	$(\text{arcctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

Замечание. Формулы записаны с учётом правила дифференцирования сложной функции.

Приложение 2

Таблица основных интегралов

1. $\int 0\,du = C;\ \ C = \mathrm{const};$

2. $\int du = u + C;$

3. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;\ \ \alpha \neq -1;$

3а. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

5. $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C;$

6. $\int e^{u} du = e^{u} + C;$

7. $\int \cos u\,du = \sin u + C;$

8. $\int \sin u\,du = -\cos u + C;$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\,u + C;$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\,u + C;$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C;$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

13. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + C;$

14. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C;$

15. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

17. $\int \mathrm{tg}\,u\,du = -\ln|\cos u| + C;$

18. $\int \mathrm{ctg}\,u\,du = \ln|\sin u| + C;$

Приложение 2

Типы дифференциальных уравнений первого порядка

Тип уравнения	Характерные признаки	Методы интегрирования
Уравнения с разделяющимися переменными $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$	Правая часть уравнения представляет собой произведение двух функций, одна зависит от x, другая — от y	Разделить переменные, т. е. уравнение привести к виду $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ и проинтегрировать
Однородное уравнение $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Правая часть уравнения — функция только от отношения переменных y/x	Уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки: $y = zx$, $y' = z'x + z$
Линейное уравнение $y' + p(x)y = q(x)$	y и y' входят в уравнение только в первой степени	Решается методом Бернулли с помощью подстановки: $y = UV$, $y' = U'V + UV'$
Уравнение Бернулли $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$	y' входит в уравнение только линейно, а y в одном из слагаемых линейно, а в другом в степени α, где $\alpha \neq 1$ и $\alpha \neq 0$	