МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
1 СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие

Предназначено для студентов 1-го курса заочной формы обучения
по направлению 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Ростов-на-Дону

ДГТУ

2022

Составитель: канд. физ.мат. наук, доцент Нурутдинова И.Н.

Приведены варианты заданий контрольных работ для студентов заочной формы обучения по основным темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Математика» в 1-м семестре. Приведены образцы решения всех заданий, снабжённые необходимыми теоретическими сведениями.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие содержит индивидуальные задания контрольной работы, выполняемой студентами заочной формы обучения в 1-м семестре. тематика заданий охватывает все основные разделы дисциплины «Математика», изучаемые в 1-м семестре: линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия, введение в анализ

Задания по каждой теме имеют 20 вариантов, правило выбора варианта перед заданиями контрольной работы. Представлены основные теоретическими положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины, и подробное решение всех заданий. Выбор тематики осуществлялся на основе анализа ФГОС ВО в базовой подготовке бакалавров направления 15.03.04. Также приведен список теоретических вопросов для подготовки к экзамену и рекомендуемая литература.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1 СЕМЕСТР ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА, ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

ПРАВИЛО ВЫБОРА ВАРИАНТА

Номер варианта студент выбирает согласно порядковому номеру в журнале группы. Если порядковый номер в журнале больше 20, то номер выбирается сначала, т.е. порядковый номер 21 - номер варианта - 1, порядковый номер 22 - номер варианта - 2 и т.д.

Задание 1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2a & -3b & c \\ 3a & -6b & 5c \\ 5a & -4b & 2c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 2abc \\ 3abc \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} a & 2b \\ -d & 3c \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

а) Подставить значения параметров *a*, *b*, *c*, *d* из таблицы 1 согласно варианту и записать матрицы *A*, *B*, *C*.

б) Найти матрицу $R=C^2+2C^T-3C^{-1}$; A^{-1}.

в) Решить систему уравнений $A\cdot X=B$ тремя методами:

по формулам Крамера; матричным методом; методом Гаусса.

Таблица 1

Номер варианта	*a*	*b*	*c*	*d*	Номер варианта	*a*	*b*	*c*	*d*
1	–1	1	-2	–4	**11**	1	2	–2	-3
2	2	-1	3	–1	**12**	1	2	–3	–2
3	1	3	-1	–4	**13**	3	–2	-1	2
4	-2	1	4	2	**14**	–2	3	–4	-1
5	-1	2	2	3	**15**	1	1	-5	–1
6	-3	2	1	-1	**16**	-1	–3	2	–1
7	–1	1	3	–4	**17**	3	–1	1	5
8	2	–1	-1	4	**18**	2	3	–1	-3
9	–2	–3	3	1	**19**	1	–1	–4	2
10	-3	3	-2	1	**20**	-4	1	1	3

Задание 2. Векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{x}$ заданы своими координатами в каноническом базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ (см. табл.). Требуется:

а) показать, что система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образует базис в пространстве R_3;

б) записать матрицу перехода от канонического базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ к базису $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ и разложить вектор $\bar{x}$ по этому базису.

Номер варианта	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{x}$
1	(2, 3, 2)	(–1, 4, –1)	(–1, –2, 4)	(4, 11, 9)
2	(1, 2, 4)	(1, –1, 1)	(2, 2, 4)	(–1, –4, –2)
3	(3, 2, 2)	(2, 3, 1)	(1, 1, 3)	(5, 1, 11)
4	(1, 5, 3)	(2, 1, –1)	(4, 2, 1)	(31, 29, 10)
5	(1, 3, 4)	(2, 2, 3)	(1, 1, –2)	(8, 10, 4)
6	(5, 1, 4)	(–1, 2, 3)	(–1, 3, 2)	(0, 14, 16)
7	(1, 3, 2)	(3, 2, 5)	(–6, 5, –3)	(12, –10, 6)
8	(2, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 1, 1)	(3, 0, –2)
9	(4, 2, 3)	(1, –3, 1)	(–2, 0, –2)	(3, 2, –1)
10	(1, 2, 1)	(0, 1, 1)	(1, 0, 1)	(5, 6, –3)
11	(3, 2, –2)	(3, –3, –1)	(1, 1, –1)	(5, 1, –4)
12	(2, 2, 1)	(1, –3, 1)	(–1, 0, –1)	(3, –1, 5)
13	(2, 1, –1)	(2, –3, 0)	(1, 1, –1)	(6, –6, 3)
14	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)	(1, 2, 1)	(7, –1, –3)
15	(4, 1, –2)	(2, –3, 0)	(3, 1, –2)	(5, –6, 3)
16	(3, 3, 1)	(2, –2, 1)	(2, 1, 1)	(1, 0, 5)
17	(1, 1, 1)	(1, –2, 4)	(2, 2, 4)	(–1, 0, 5)
18	(1, 2, 0)	(0, –3, 0)	(2, 1, 1)	(7, –1, –3)
19	(2, 2, 3)	(1, 1, –2)	(1, 3, 4)	(–1, 1, 0)
20	(–1, 4, 3)	(–1, 3, 2)	(5, 1, 4)	(1, –1, 1)

Задание 3. Элементы матрицы $C_{4\times5}$ заданы по вариантам:

Номер варианта	$C_{4\times5}$	Номер варианта	$C_{4\times5}$	Номер варианта	$C_{4\times5}$
1	$\begin{matrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{matrix}$	**4**	$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 2 \\ 9 & -9 & 6 & -16 & 2 \end{matrix}$	**7**	$\begin{matrix} 2 & 3 & 11 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 14 & 9 & 4 \end{matrix}$
2	$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 9 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -3 & 1 \end{matrix}$	**5**	$\begin{matrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & -2 & 6 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 20 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & -5 \end{matrix}$	**8**	$\begin{matrix} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 4 & -4 & -4 & -16 & -8 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{matrix}$

3	2	–4	3	1	0	**6**	2	3	4	1	2	**9**	2	7	3	1	6
	1	–2	1	–4	2		1	1	7	1	6		5	12	5	3	10
	0	1	–1	3	1		3	2	1	5	8		6	–1	–2	5	–2
	4	–7	4	–4	5		2	1	–6	4	2		3	5	2	2	4
10	2	–5	3	1	5	**14**	8	–4	3	6	8	**18**	4	5	2	3	1
	3	–7	3	–1	–1		10	–5	5	9	15		2	4	1	2	3
	5	–9	6	2	7		4	–2	1	2	2		2	–2	1	0	–7
	4	–6	3	1	8		2	–1	3	7	11		6	1	3	2	2
11	2	3	5	1	2	**15**	3	3	5	1	2	**19**	1	2	3	–2	1
	3	2	5	1	2		3	5	3	1	–3		3	6	5	–4	3
	3	5	2	1	–3		3	5	1	3	–3		1	2	7	–4	1
	3	5	1	2	–3		0	2	–2	0	–5		2	4	2	–3	3
12	3	–2	–5	1	3	**16**	2	–1	1	2	3	**20**	1	1	0	–3	–1
	2	–3	1	5	–3		6	–3	2	4	5		1	–1	2	–1	0
	1	2	0	–4	–3		6	–3	4	8	13		4	–2	6	3	–4
	1	–1	–4	9	22		4	–2	1	1	2		2	4	–2	4	–7
13	1	2	2	3	5	**17**	1	1	3	–2	3						
	1	2	1	2	1		2	2	4	–1	3						
	1	2	3	5	13		3	3	5	–2	3						
	1	2	3	3	9		2	2	8	3	9						

1. Считая матрицу $C_{4\times5}$ матрицей однородной системы $C\cdot X = 0$, найти для этой системы:

а) фундаментальную систему решений;

б) общее решение;

в) какое-нибудь частное решение.

2. Считая матрицу $C_{4\times5}$ расширенной матрицей неоднородной системы $C^{*}\cdot X=C^{**}$, где $C=(C^{*}\,|\,C^{**})$, решить эту систему, предварительно исследовав её совместность по теореме Кронекера—Капелли.

Задание 4. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ (см. табл.). Требуется найти:

а) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

в) площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) объём пирамиды;

д) канонические уравнения прямой l, проходящей через точки A_1 и A_4;

е) уравнение плоскости П, проходящей через точки A_1, A_2, и A_3;

ж) угол между прямой l и плоскостью П;

з) высоту пирамиды.

Номер варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(1, 2, 1)	(0, 2, 5)	(–1, 3, 1)	(1, 4, 3)
2	(–1, –2, 1)	(–2, –2, 5)	(–3, –1, 1)	(–1, 0, 3)

3	(0, 2, –1)	(–1, 2, 3)	(–2, 3, 7)	(0, 4, 1)
4	(–1, 2, 0)	(–2, 2, 4)	(–3, 3, 0)	(–1, 4, 2)
5	(2, 2, 3)	(1, 2, 7)	(0, 3, 3)	(2, 4, 5)
6	(2, –1, 1)	(1, –1, 5)	(0, 0, 1)	(2, 1, 3)
7	(–1, 1, –2)	(–2, 1, 2)	(–3, 2, –2)	(–1, 3, 0)
8	(–1, 2, 1)	(–2, 2, 5)	(–3, 3, 1)	(–1, 4, 3)
9	(–2, 1, –1)	(–3, 1, 3)	(–4, 2, 1)	(–2, 3, 1)
10	(1, 1, 2)	(0, 1, 6)	(–1, 2, 2)	(1, 3, 4)
11	(0, –1, 2)	(–1, –1, 6)	(–2, 0, 2)	(0, 1, 4)
12	(3, 0, 2)	(2, 0, 6)	(1, 1, 2)	(3, 2, 4)
13	(–2, –1, 1)	(–3, –1, 5)	(–4, 0, 1)	(–2, 1, 3)
14	(1, –1, 2)	(0, –1, 6)	(–1, 0, 2)	(1, 1, 4)
15	(2, 3, 2)	(1, 3, 6)	(0, 4, 2)	(2, 5, 4)
16	(–1, 0, 2)	(–2, 0, 6)	(–3, 1, 2)	(–1, 2, 4)
17	(2, 0, 3)	(1, 0, 7)	(0, 1, 3)	(2, 2, 5)
18	(2, –1, 2)	(1, –1, 6)	(0, 0, 2)	(2, 1, 4)
19	(1, –2, 1)	(0, –2, 5)	(–1, –1, 1)	(1, 0, 3)
20	(0, 3, 2)	(–1, 3, 6)	(–2, 4, 2)	(0, 5, 4)

Задание 5. Найти пределы, используя элементарные способы раскрытия неопределенностей или правило Лопиталя.

Номер варианта	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$
1	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27x^3-3x-8}{2x^2+6x-11}$;	б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-25}$;	в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x}{e^{2x}-1}$.
2	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+2x^5}{1-4x^3-3x^5}$;	б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2-2x-15}$;	в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{-x}-1}{\mathrm{tg}5x}$.
3	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+4x^2-8}$;	б) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{3x^2+17x-6}{x^2+2x-24}$;	в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$.
4	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x+6x^3}{10+2x-3x^3}$;	б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^3-8}$;	в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+\pi x}{\sin 7x}$.
5	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27x^3-8}{5x^4+2x-1}$;	б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$;	в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2+2x}{\mathrm{tg}4x}$.
6	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x+2}{2x^3-3x^2+x}$;	б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$;	в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{\arcsin 2x}$.

7	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+x+6}{x^3+8x^2+1}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$.
8	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{2x^2+3}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\mathrm{arctg}3x}$.
9	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+7x}{3x^3-2x+1}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x^3-1}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}$.
10	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+5x^2-x^4}{2x^4-3x^3+1}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{3x-1}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}-1}$.
11	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-2}{2x-1}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x^3+2x}$.
12	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x-8}{2x^2+6x-11}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-5x+4}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\ln(1+x)}$.
13	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-x}{2x^4+5x-1}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^2-12x+20}{x^2-9x-10}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 2x}$.
14	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3x^5}{x^3+8}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-9x-10}{x^3+1}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1}{\mathrm{arctg}\, x}$.
15	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-7x+6}{-3+2x^2+x^4}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-x-6}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{1-\cos x}$.
16	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+x-3}{27x^3+8x-5}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\arcsin 3x}$;
17	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-3x+4}{2x^3-9}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\mathrm{tg}2x}{x}$.
18	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3x^3}{x^4+8x^2-1}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{x^2-8x}$.
19	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x-2}{x^3+2x+8}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-4x+3}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$;
20	*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+1}{5x^4-2x^2+3}$;	*б)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$;	*в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{6x}}{\sin 4x}$.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1 СЕМЕСТР

Матрицы. Операции с матрицами. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Матрицей размера $m \times n$ называется упорядоченная таблица, составленная из чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Обозначаются матрицы A, B, C и т. д. Элемент матрицы, находящийся в строке с номером i и столбце с номером j, обозначается a_{ij}. Если $m = n$, то матрица называется квадратной порядка n.

Произведением матрицы A на число λ называется матрица C того же размера, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ:

$$C = \lambda \cdot A <=> c_{ij} = \lambda a_{ij} (i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n).$$

Суммой двух матриц A и B одинаковых размеров называется матрица C того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$C = A + B <=> c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} (i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n). \qquad (1.1)$$

Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матрицы $A_{m\times k}$ на матрицу $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$C = A \cdot B;\ <=> c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} \, (i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n). \qquad (1.2)$$

Из определения произведения матриц заключаем, что операция умножения не обладает свойством коммутативности, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Возведение квадратной матрицы A в целую положительную степень $p(p > 1)$: $A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{p\ \text{ðàç}}$.

Матрицей, *транспонированной* к матрице A, называется матрица, образованная из матрицы A заменой её строк соответствующими столбцами. Транспонированная матрица к матрице A обозначается A^{T}.

Всякой квадратной матрице A порядка n ставится в соответствие по определённому закону некоторое число, которое называется *определителем* того же порядка матрицы A и обозначается $|A|$.

Определитель первого порядка равен самому числу.

Определитель второго порядка определяется равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.3)$$

Определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1.4)$$

Минором элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n–1)$-го порядка, полученный из исходного определителя путём вычеркивания i-й строки и j-го столбца. Обозначается минор M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, умноженный на $(–1)^{i+j}$, т. е. A_{ij}:

$$\mathrm{A}_{ij} = (–1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Формулу (1.4) можно записать таким образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Единичной называется квадратная матрица порядка n, у которой элементы главной диагонали a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} равны 1, а остальные элементы равны 0. Пусть E — единичная матрица. При умножении матрицы A на E слева или справа получается матрица A: $AE = EA = A$.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A, если выполняются условия: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Обратная матрица к квадратной матрице A существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы A не равен нулю, т. е. $|\grave{A}| \neq 0$. При этом

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^T, \qquad (1.5)$$

где A^* — матрица, в которой каждый элемент матрицы A заменён его алгебраическим дополнением. Такая матрица называется *присоединённой* к матрице A.

Минором порядка k матрицы A называется определитель порядка k матрицы, составленный из элементов матрицы A, стоящих на пересечении произвольных k строк и k столбцов.

Рангом матрица называется число r, такое, что выполняются условия:

1) существует минор порядка r, не равный нулю;
2) все миноры большего порядка, начиная с $(r+1)$, равны нулю.

Ранг матрицы A обозначается $r(A)$. Ранг матрицы — это наибольший порядок её минора, не равного нулю. Этот минор называется *базисным*.

Элементарные преобразования, не меняющие ранга матрицы:

1) перестановка строк (столбцов) местами;
2) транспонирование;
3) вычёркивание строки (столбца), все элементы которой равны нулю;
4) умножение какой-либо строки (столбца) на число, отличное от нуля;
5) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

Рассмотрим систему m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Обозначим матрицу из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \dots \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \; a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix},$$ её называют *основной матрицей системы*.

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных,

$$(A/B) = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} \; a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} \; a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1} \, a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ — расширенная матрица системы.

Систему уравнений (1.6) можно записать в матричном виде:

$$A \cdot X = B. \qquad (1.7)$$

Совокупность чисел d_1, d_2,…, d_n, обращающих все уравнения системы (1.7) в тождества, называется *решением системы*.

Система уравнений *совместна*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместна*, если она не имеет решения.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Элементарные преобразования системы уравнений, переводящие её в равносильную систему:

1) перестановка местами любых двух уравнений;

2) умножение обеих частей любого уравнения на число, отличное от нуля;

3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число.

Система уравнений называется *неоднородной*, если $B \neq 0$, и *однородной*, если $B = 0$.

Система уравнений называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет бесконечное множество решений.

Исследование системы уравнений на совместность основано на следующей теореме:

Теорема Кронекера—Капелли. Для того, чтобы система уравнений с n неизвестными была совместна, необходимо и достаточно чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы системы, т. е. $r(A) = r(A \mid B) = r$.

При этом:

1) если $r = n$, система определена;

2) если $r<n$, система не определена.

Рассмотрим следующие методы решения СЛАУ: метод Крамера, матричный метод, метод Жордана—Гаусса.

Метод Крамера

Применяется для решения неоднородных систем n уравнений с n неизвестными, у которых определитель основной матрицы системы отличен от нуля: $\Delta = |A| \neq 0$.

Тогда система имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (1.8)$$

где Δ_i — определитель, полученный из определителя системы Δ заменой i-го столбца матрицы A столбцом свободных членов B.

Матричный метод

Применяется при тех же условиях, что и метод Крамера. Столбец неизвестных находим, решая матричное уравнение (1.7). Умножим (1.7) слева на матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B.$$

По определению обратной матрицы $A^{-1}\cdot A = E$, следовательно,

$$E\cdot X = A^{-1}\cdot B.$$

Умножение матрицы на единичную матрицу не меняет матрицу, поэтому $E\cdot X = X$ и

$$X = A^{-1}\cdot B. \qquad (1.9)$$

Метод Жордана—Гаусса

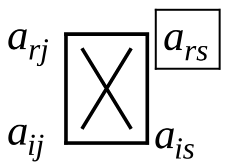
Применяется для решения как неоднородных, так и однородных систем с произвольным числом уравнений m и произвольным числом неизвестных n. С помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы системы $(A\,|\,B)$ исходную систему (4) преобразуют в равносильную, которая позволяет решить вопрос о совместности системы, и, если она совместна, записать её решение. Преобразования проводятся по следующей схеме, которая называется *схемой Жордановых исключений*:

1) выбираем любой элемент матрицы A, отличный от нуля. Он называется *разрешающим элементом*. Пусть это a_{rs}, тогда r-я строка называется *разрешающей строкой*, а s-й столбец называется *разрешающим столбцом*;

2) элементы разрешающей строки (r-й) оставляем без изменения;

3) элементы разрешающего столбца (s-го), кроме разрешающего элемента a_{rs}, заменяем нулями;

4) остальные элементы матрицы (A/B) пересчитываем по формуле:



$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{rj}a_{is}}{a_{rs}}, \quad \begin{array}{l} i = 1,\ldots,m, i \neq r; \\ j = 1,\ldots,n,\ j \neq s. \end{array} \qquad (7)$$

По этому же правилу преобразуются и элементы столбца B, кроме b_r. В результате матрица $(A\,|\,B)$ преобразуется в эквивалентную матрицу A', в которой снова выбираем разрешающий элемент. Это любой элемент $a'_{ij} \neq 0$ матрицы A' и расположенный в строке и столбце, которые ещё не были разрешающими. Схему преобразований 1—4 повторяем до тех пор, пока все строки (или столбцы) матрицы A не будут использованы как разрешающие.

Если при преобразованиях появляется строка, полностью состоящая из нулей, то её можно отбросить.

Если при преобразованиях появляется строка, соответствующая противоречивому уравнению вида:

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = b_i, \qquad \text{где } b_i \neq 0,$$

то процесс преобразований на этом прекращают, так как система уравнений несовместна.

Задание 1.

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2a & -3b & c \\ 3a & -6b & 5c \\ 5a & -4b & 2c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 2abc \\ 3abc \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} a & 2b \\ -d & 3c \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

где значения параметров следующие a =1, b =1, c = -1, d =4.

а) Подставить значения параметров a, b, c, d и записать матрицы A, B, C.

б) Найти матрицу $R = C^2 + 2C^T - 3C^{-1}$; A^{-1}.

в) Решить систему уравнений $A\cdot X=B$ тремя методами:

по формулам Крамера; матричным методом; методом Жордана-Гаусса.

Решение.

а) Подставим значения параметров и получим следующие матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

б) Найдем матрицу R. Определим матрицу C^2:

$$C^2 = C\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-4) & 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) \\ -4\cdot 1 + (-3)\cdot(-4) & -4\cdot 2 + (-3)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу C: $C^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

и найдём произведение $2C^T$: $2C^T = 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

Определим C^{-1} по формуле (1.5): $C^{-1} = \dfrac{1}{|C|}(C^*)^T$.

Вычислим определитель матрицы C по формуле (1.3):

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3) - 2\cdot(-4) = -3 + 8 = 5 \neq 0.$$

Следовательно, C^{-1} существует. Определим алгебраические дополнения элементов матрицы C и присоединённую матрицу C^*:

$$C_{11} = -3;\; C_{12} = 4;\; C_{21} = -2;\; C_{22} = 1;$$

$C^* = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $(C^*)^T = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ и обратная матрица C^{-1}:

$$C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & -0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность нахождения C^{-1}. Для этого перемножим полученную матрицу на данную матрицу C слева и справа и убедимся, что получается единичная матрица:

$$C^{-1}\cdot C = \begin{pmatrix} -0,6 & -0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6\cdot1 + (-0,4)\cdot(-4) & -0,6\cdot2 + (-0,4)\cdot(-3) \\ 0,8\cdot1 + 0,2\cdot(-4) & 0,8\cdot2 + 0,2\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C\cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0,6 & -0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-0,6) + 2\cdot0,8 & 1\cdot(-0,4) + 2\cdot0,2 \\ -4\cdot(-0,6) + (-3)\cdot0,8 & -4\cdot(-0,4) + (-3)\cdot0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица C^{-1} определена правильно.

Найдем произведение матрицы C^{-1} на 3:

$$3C^{-1} = 3\begin{pmatrix} -0,6 & -0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,8 & -1,2 \\ 2,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получим:

$$R = C^2 + 2C^T - 3C^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1,8 & -1,2 \\ 2,4 & 0,6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 + 2 - (-1,8) & -4 - 8 - (-1,2) \\ 8 + 4 - 2,4 & 1 - 6 - 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,2 & -10,8 \\ 9,6 & -5,6 \end{pmatrix}.$$

в) Дана система уравнений $A\cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -3b & c \\ 3a & -6b & 5c \\ 5a & -4b & 2c \end{pmatrix},\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2abc \\ 3abc \end{pmatrix},\; a = 1,\, b = 1,\; c = -1.$$

Решить систему тремя методами: по формулам Крамера; матричным методом; методом Жордана—Гаусса.

Решение. Согласно условиям задания имеем:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 3 & -6 & -5\\ 5 & -4 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ -3\end{pmatrix}.$$

Систему линейных алгебраических уравнений $A\cdot X = B$ запишем в координатной форме:

$$\begin{cases}2x_1 & -3x_2 & -x_3=0,\\ 3x_1 & -6x_2 & -5x_3=-2,\\ 5x_1 & -4x_2 & -2x_3=-3.\end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера.

Найдём определитель системы, используя формулы (1.3) и (1.4):

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 3 & -6 & -5\\ 5 & -4 & -2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-6 & -5\\ -4 & -2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3 & -5\\ 5 & -2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3 & -6\\ 5 & -4\end{vmatrix}=$$
$$=2(12-20)+3(-6+25)-1(-12+30)=23.$$

Так как $\Delta\neq 0,$ система имеет единственное решение, которое находим по формулам Крамера (1.8):

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & -3 & -1\\ -2 & -6 & -5\\ -3 & -4 & -2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-2 & -5\\ -3 & -2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2 & -6\\ -3 & -4\end{vmatrix}=3(4-15)-1(8-18)=-23;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & -5\\ 5 & -3 & -2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-2 & -5\\ -3 & -2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=2(4-15)-1(-9+10)=-23;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -3 & 0\\ 3 & -6 & -2\\ 5 & -4 & -3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-6 & -2\\ -4 & -3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=2(18-8)+3(-9+10)=23.$$

Итак, $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-1,$ $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=-1,$ $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=1.$

Сделаем проверку, подставив найденные значения x_1, x_2, x_3 в исходную систему, и убедимся, что все три уравнения данной системы обращаются в тождества:

$$\begin{cases} 2\cdot(-1)-3\cdot(-1)-1=-2+3-1=0; \\ 3\cdot(-1)-6\cdot(-1)-5\cdot1=-3+6-5=-2; \\ 5\cdot(-1)-4\cdot(-1)-2\cdot1=-5+4-2=-3; \end{cases} \begin{cases} 0=0; \\ -2=-2; \\ -3=-3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

Решим систему матричным методом.

Из пункта а) $\Delta=23\neq0,$ следовательно, матрица системы имеет обратную A^{-1}, которую найдём по формуле (1.5).

Для этого вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-6 & -5\\ -4 & -2\end{vmatrix}=-8,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-19,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -6\\ 5 & -4\end{vmatrix}=18,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -4 & -2\end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -6 & -5\end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -5\end{vmatrix}=7,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -6\end{vmatrix}=-3.$$

Получим A^{-1} по формуле (1.5):

$$A^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-8 & -2 & 9\\ -19 & 1 & 7\\ 18 & -7 & -3\end{pmatrix}.$$

По формуле (1.9) имеем

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-8 & -2 & 9\\ -19 & 1 & 7\\ 18 & -7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -2\\ -3\end{pmatrix}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-8\cdot0 & -2\cdot(-2) & +9\cdot(-3)\\ -19\cdot0 & +1\cdot(-2) & +7\cdot(-3)\\ 18\cdot0 & -7\cdot(-2) & -3\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-23\\ -23\\ 23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

Решим систему методом Жордана—Гаусса.

Преобразования расширенной матрицы системы оформим в виде таблицы (см. табл.).

A/B	Σ	Примечания
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & -2 \\ 5 & -4 & -2 & -3 \end{array}\right)$	–2 –10 –4	Умножим первую строку на –1
$\left(\begin{array}{ccc\|c} -2 & 3 & \boxed{1} & 0 \\ 3 & -6 & -5 & -2 \\ 5 & -4 & -2 & -3 \end{array}\right)$	2 –10 –4	Разрешающий элемент a_{13}=1. Оставляем разрешающую строку (первую) без изменений. Все элементы разрешающего столбца (третьего), кроме a_{13}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
$\left(\begin{array}{ccc\|c} -2 & 3 & 1 & 0 \\ -7 & 9 & 0 & -2 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & -3 \end{array}\right)$	2 0 0	Разрешающий элемент a_{31}=1. Оставляем разрешающую строку (третью) без изменений. Все элементы разрешающего столбца (первого), кроме a_{31}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & 23 & 0 & -23 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right)$	2 0 0	Умножим вторую строку на 1/23
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right)$	2 0 0	Разрешающий элемент a_{22} = 1. Оставляем разрешающую строку (вторую) без изменений. Все элементы разрешающего столбца (второго), кроме a_{22}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$	2 0 0	

В последнем (четвертом) столбце матрицы $A\,|\,B$ получено решение системы, соответствующее неизвестным в тех столбцах, в которых элементы равны единице, а именно: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Отметим, что решения системы, полученные в пунктах *а*), *б*) и *в*), как и следовало ожидать, совпадают.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

n-мерное векторное пространство. Его базис

n-мерным вектором называется упорядоченная совокупность из n действительных чисел: $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *компонентами вектора*.

n-мерный вектор можно рассматривать как матрицу с одной строкой, поэтому операции с векторами вводят аналогично матрицам:

Пусть $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$

1) $\overline{x} = \overline{y} <=> x_i = y_i,\ i = 1, ..., n;$

2) $\lambda\overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n);$

3) $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$

Под *нуль-вектором* понимают $\overline{0} = (0, 0, ..., 0).$

Множество n-мерных векторов с введёнными операциями сложения и умножения на число называют n-мерным векторным пространством и обозначают R_n.

Линейной комбинацией системы векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ называют выражение вида:

$$\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + ... + \alpha_m\overline{e}_m,$$

где $\alpha_i (i = 1, ..., m)$ — некоторые числа.

Если линейная комбинация векторов равна нуль-вектору:

$$\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + ... + \alpha_m\overline{e}_m = \overline{0}, \qquad (8)$$

и при этом коэффициенты α_i не все равны нулю одновременно, то система векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_m$ называется *линейно зависимой*. Если равенство (8) возможно только тогда, когда все коэффициенты $\alpha_i = 0,\ i = 1, ..., m,$ то система векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_m$ называется *линейно независимой*.

Если система векторов линейно зависима, то хотя бы один из них линейно выражается через остальные.

В пространстве R_n существует система n линейно независимых векторов. Любая система из $(n+1)$ векторов и больше линейно зависима.

Таким образом, максимальное число линейно независимых векторов в R_n равно n. Число n называют *размерностью* пространства R_n.

Любая система из n линейно независимых векторов в R_n называется *базисом*.

Теорема (критерий базиса в R_n). Для того, чтобы система векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ образовывала базис в R_n, необходимо и достаточно чтобы определитель, составленный из координат этих векторов, был отличен от нуля.

Если система векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ образует базис в R_n, то любой вектор $\overline{x} \in R_n$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$:

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + ... + x_n\overline{e}_n. \qquad (9)$$

Формула (9) называется разложением вектора $\overline{x}$ по базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *координатами вектора* $\overline{x}$ в этом базисе.

Приведём пример одного базиса в пространстве R_n, называемого *каноническим* базисом:

$$\begin{aligned} &\overline{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \\ &\overline{e}_2 = (0, 1, ..., 0), \\ &...................... \\ &\overline{e}_n = (0, 0, ..., 1). \end{aligned}$$

Задание 2. Показать, что заданная система векторов $\overline{a}_1 = (3, 2, -2)$, $\overline{a}_2 = (3, -3, -1)$, $\overline{a}_3 = (1, 1, -1)$ образует базис в пространстве R_3, записать матрицу перехода от канонического базиса $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ к базису $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$ и разложить вектор $\overline{x} = (5, 1, -4)$ по базису $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$.

Решение. Согласно теореме (критерий базиса в R_n), система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ образует базис, тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат векторов, отличен от нуля. Вычислим этот определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(3+1) - 3(-2+2) + 1(-2-6) = 4 \neq 0.$$

Следовательно, система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ образует базис в пространстве R_3. Матрица перехода от канонического базиса $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ к базису $B=\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ состоит из координат векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ в базисе $B=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, записанных в соответствующие столбцы, и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Разложение вектора $\bar{x}$ по базису $B=\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ согласно (9) ищем в виде:

$$\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3.$$

Это векторное равенство эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Поскольку определитель этой системы отличен от нуля, используем для её решения формулы Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(3+1) - 3(-1+4) + 1(-1-12) = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-1+4) - 5(-2+2) + 1(-8+2) = 3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(12+1) - 3(-8+2) + 5(-2-6) = 17.$$

Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{3}{4}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{17}{4}$.

Сделаем проверку, подставив найденное решение в исходную систему:

$$\begin{cases} 3\cdot(-1/2) + 3\cdot(3/4) + 17/4 = -3/2 + 13/2 = 5; \\ 2\cdot(-1/2) - 3\cdot(3/4) + 17/4 = -13/4 + 17/4 = 1; \\ -2\cdot(-1/2) - 3/4 - 17/4 = -16/4. \end{cases} \begin{cases} 5 = 5; \\ 1 = 1; \\ -4 = -4. \end{cases}$$

Таким образом, разложение вектора $\overline{x}$ по базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ имеет вид:

$$\overline{x} = -\frac{1}{2}\overline{a}_1 + \frac{3}{4}\overline{a}_2 + \frac{17}{4}\overline{a}_3.$$

Решение однородных систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Такая система всегда совместна, поскольку имеет нулевое решение $x_i = 0 \ \ (i = 1, ..., n)$.

Однако, при определенных условиях она может иметь и ненулевое решение.

Теорема (критерий ненулевого решения однородной системы уравнений). Для того, чтобы однородная система уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных.

Будем рассматривать ненулевые решения системы как столбцы, состоящие из *n* элементов; обозначим их $E_1, E_2, ..., E_k$.

Линейно независимая система решений $E_1, E_2, ..., E_k$ называется *фундаментальной системой решений*, если любое другое решение является линейной комбинацией решений $E_1, E_2, ..., E_k$.

Теорема. Если ранг *r* матрицы системы однородных уравнений меньше числа неизвестных *n*, то эта система имеет фундаментальную систему решений, которая состоит из *n*–*r* линейно независимых решений исходной системы.

Общее решение однородной системы уравнений имеет вид:

$$X_{00} = C_1E_1 + C_2E_2 + \ldots + C_{n-r}E_{n-r}. \qquad (10)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ — произвольные числа.

Решение системы, полученное из общего при фиксированных значениях $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$, называется *частным*.

Задание 3. 1) Считая матрицу $C_{4\times5}$ матрицей однородной системы $C\cdot X = 0$, найти:

а) фундаментальную систему решений;

б) общее решение;

в) какое-нибудь частное решение.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & -2 & 5 & 20 & 3 \\ 9 & -3 & 4 & 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

Решение. Исходная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 3x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0. \end{cases}$$

Преобразования матрицы системы оформим в виде таблицы (табл.).

C					Σ	Примечания
6	–2	3	4	9	20	Умножим вторую строку на –1
3	–1	2	6	3	13	
6	–2	5	20	3	32	
9	–3	4	2	15	27	
6	–2	3	4	9	20	Разрешающий элемент a_{22}=1. Разрешающую строку (вторую) оставляем без изменений. Все элементы разрешающего столбца (второго), кроме a_{22}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
–3	$\boxed{1}$	–2	–6	–3	–13	
6	–2	5	20	3	32	
9	–3	4	2	15	27	
0	0	–1	–8	3	–6	Умножим первую строку на –1, а четвёртую строку на 1/2
–3	1	–2	–6	–3	–13	
0	0	1	8	–3	6	
0	0	–2	–16	6	–12	

$\begin{matrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 8 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ -13 \\ 6 \\ -6 \end{matrix}$	Разрешающий элемент a_{13}=1. Разрешающую строку (первую) оставляем без изменений. Все элементы разрешающего столбца (третьего), кроме a_{13}, заменяем нулями. Остальные элементы преобразуем по формуле (7)
$\begin{matrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 8 & -3 \\ -3 & 1 & 0 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$	Преобразование закончено. Получены две строки из нулей, все остальные строки преобразованы

а) Из табл. 4 следует, что ранг матрицы C равен $r(C)$=2, так как есть миноры второго порядка, отличные от нуля, например $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, а любые миноры третьего и четвёртого порядков равны нулю.

Переменные системы x_2, x_3, соответствующие базисному минору матрицы А называются *базисными переменными*, остальные x_1, x_4, x_5 — свободными.

Система, равносильная исходной, имеет вид:

$$\begin{cases} x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + 10x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

Оставляя слева базисные переменные x_2 и x_3, соответствующие линейно независимым столбцам матрицы A, и перенося в правую часть уравнений неизвестные x_1, x_4, x_5, получаем:

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 - 10x_4 + 9x_5, \\ x_3 = -8x_4 + 3x_5. \end{cases}$$

б) Полагая свободные переменные равными произвольным константам $x_1 = c_1$, $x_4 = c_4$, $x_5 = c_5$, получаем общее решение системы в виде:

$$X_{00} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 3c_1 - 10c_4 + 9c_5 \\ -8c_4 + 3c_5 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему решений образуют три линейно независимых частных решения. Получим эти решения, задавая системе констант (c_1, c_4, c_5) линейно независимые значения, например, (1; 0; 0), (0; 1; 0),
(0; 0; 1). Вычисления занесем в таблицу (табл.).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	3	0	0	0
0	–10	–8	1	0
0	9	3	0	1

Итак, фундаментальную систему составляют три линейно независимых решения:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы, согласно (10), имеет вид:

$$X_{00} = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3,$$ где c_1, c_2, c_3 — произвольные константы.

в) Частное решение можно получить из общего решения, придавая определённые значения произвольным постоянным. Решения E_1, E_2, E_3, образующие фундаментальную систему решений, являются частными решениями этой однородной системы.

2) Считая матрицу $C_{4\times5}$ расширенной матрицей неоднородной системы $C^*X = C^{**}$, где $C = (C^* \mid C^{**})$, решить эту систему, предварительно исследовав её на совместность по теореме Кронекера—Капелли.

Решение. Неоднородная система $C^*X = C^{**}$ имеет вид:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3, \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 = 3, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 15. \end{cases}$$

Чтобы исследовать систему на совместность по теореме Кронекера—Капелли, нужно проверить равенство $r(C^{*})=r(C^{*}\square C^{**})$. Из табл. следует, что $r\,(C^{*}) = r\,(C^{*}\square C^{**})=2$, значит система совместна.

Так как ранг матрицы меньше числа неизвестных $n = 4$, то система является неопределенной. Множество всех решений неоднородной системы получим, решив равносильную ей систему, полученную методом Жордана—Гаусса:

$$\begin{cases} x_3 + 8x_4 = -3, \\ -3x_1 + x_2 + 10x_4 = -9. \end{cases}$$

Базисные переменные x_2, x_3 выразим через свободные переменные x_1, x_4:

$$\begin{cases} x_2 = -9 + 3x_1 - 10x_4, \\ x_3 = -3 - 8x_4. \end{cases}$$

Полагая свободные переменные равными произвольным постоянным $x_1 = c_1$, $x_4 = c_4$, находим общее решение неоднородной системы в виде:

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ -9 + 3c_1 - 10c_4 \\ -3 - 8c_4 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Элементы векторной алгебры в R_3

Трехмерное векторное пространство R_3 есть частный случай R_n при $n = 3$. Декартов прямоугольный базис в R_3 образуют три единичных, взаимно перпендикулярных вектора

$$\begin{aligned} \bar{i} &= \bar{e}_1 = (1,0,0), \\ \bar{j} &= \bar{e}_2 = (0,1,0), \\ \bar{k} &= \bar{e}_3 = (0,0,1). \end{aligned}$$

Совокупность начала координат (точки O) и декартова прямоугольного базиса называется декартовой прямоугольной системой координат $OXYZ$.

Согласно формуле (9) любой вектор $\bar{a}$ в R_3 можно разложить единственным образом по $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, т. е. представить в виде:

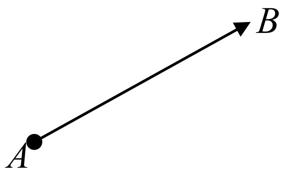
$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k},$$

где a_x — координата вектора по оси OX;

a_y — координата вектора по оси OY;

a_z — координата вектора по оси OZ.

Наряду с аналитическим заданием вектора как упорядоченной тройки чисел в R_3 рассматривают вектор как направленный отрезок, имеющий начало и конец. Конец вектора отмечается стрелкой.



$\overline{a} = \overline{AB}$

A — начало вектора,

B — конец вектора.

Длина отрезка AB называется *модулем вектора* и обозначается $|\overline{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

Если известны координаты вектора $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то модуль вектора вычисляется по формуле:

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (2.1)$$

Радиусом-вектором точки в декартовой прямоугольной системе координат называется вектор, начало которого расположено в начале координат, а конец в данной точке A, т. е. вектор $\overline{OA}$.

Координатами точки A называются координаты её радиуса-вектора. Если $\overline{OA} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$, то (a_x, a_y, a_z) координаты точки A.

Пусть вектор $\overline{a} = \overline{AB}$, причём заданы координаты точек A и B: $A(a_x, a_y, a_z)$ и $B(b_x, b_y, b_z)$. Тогда координаты вектора $\overline{AB}$ равны разности одноимённых координат конца и начала:

$$\overline{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z). \qquad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) следует формула для расстояния между двумя точками A и B:

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}. \qquad (2.3)$$

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число (скаляр), обозначаемое $\left(\bar{a},\bar{b}\right)$, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi, \tag{2.4}$$

где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

В декартовой прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{2.5}$$

$(a_x,\, a_y,\, a_z)$ — координаты вектора $\bar{a}$;

$(b_x,\, b_y,\, b_z)$ — координаты вектора $\bar{b}$.

Из (2.4) и (2.5) получается формула для вычисления косинуса угла между двумя векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{2.6}$$

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *ортогональными* (обозначаются $\bar{a}\perp\bar{b}$), если угол φ между ними равен прямому, т. е. cosφ = 0. Условие ортогональности векторов:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{2.7}$$

Упорядоченная тройка векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется *правой*, если из конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму $\bar{b}$ виден происходящим против часовой стрелки и называется *левой*, если такой поворот происходит по часовой стрелке.

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}=\left[\bar{a},\,\bar{b}\right]$, такой что:

1) $\bar{c}\perp\bar{a},\bar{c}\perp\bar{b},$ т. е. $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) направлен так, что тройка $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ — правая;

3) модуль вектора $\bar{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, как на сторонах, т. е.

$$|\bar{c}| = S_{\square} = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi. \tag{2.8}$$

Если $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то для векторного произведения справедлива формула:

$$\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется число (обозначаемое $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$), равное скалярному произведению векторного произведения первых двух векторов на третий:

$$\left(\left[\bar{a}, \bar{b}\right], \bar{c}\right) = \left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right).$$

Смешанное произведение векторов по абсолютной величине равно объему параллелепипеда $V_{\text{пар}}$, построенного на этих векторах как на сторонах, т. е.

$$V_{\text{пар}} = \left|\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)\right|. \tag{2.10}$$

Если $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то справедлива формула:

$$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или параллельных прямых. Условие коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

1) в векторной форме $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, где λ — скаляр;

2) в координатной форме $$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda. \tag{2.12}$$

Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называются *компланарными*, если они лежат в одной или параллельных плоскостях. Условие компланарности трёх векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

1) в векторной форме: $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$, где λ, μ — числа;

2) в координатной форме:
$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (22)$$

Задание 4. Даны координаты вершин треугольной пирамиды: A_1 (–1, 0, 1), A_2 (2, 3, 1), A_3 (0, –2, 2), A_4 (1, –1, 5).

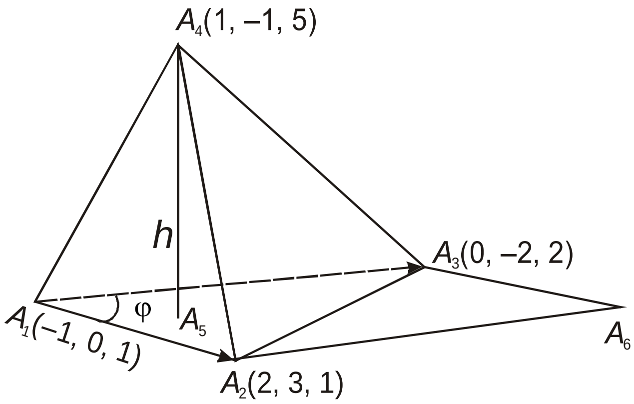


Рис. 1

Требуется найти:

а) длины рёбер A_1A_2 и A_1A_3;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

в) площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) объём пирамиды $A_1A_2A_3\,A_4$.

а) Используем формулы (2.2) и (2.3).

Определим координаты векторов:

$$\overline{A_1A_2} = (2-(-1),\ 3-0,\ 1-1) = (3,\ 3,\ 0),$$
$$\overline{A_1A_3} = (0-(-1),\ -2-0,\ 2-1) = (1,\ -2,\ 1).$$

Ребро $A_1A_2 = \left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ед.,

$$A_1A_3 = \left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{18} = \sqrt{6} \text{ ед.}$$

б) Угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_3 рассматриваем как угол между векторами $\overline{A_1A_2} = (3,\ 3,\ 0)$ и $\overline{A_1A_3} = (1,\ -2,\ 1)$.

По формуле (2.6) для косинуса угла между двумя векторами получим:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3}\right)}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\left|\overline{A_1A_3}\right|} = \frac{3\cdot 1 + 3(-2) + 0\cdot 1}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3-6+0}{3\sqrt{12}} = \frac{-3}{6\sqrt{3}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}},$$

$$\varphi = \pi - \arccos\frac{3}{2\sqrt{3}}.$$

в) Грань $A_1A_2A_3$ есть треугольник, площадь которого равна половине площади параллелограмма $A_1A_2A_6A_3$, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$. По формуле (2.8): $S_{\square} = \left|\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]\right|.$

Вычислим векторное произведение векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$ по формуле (2.9):

$$\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(3\cdot 1 - (-2)0\right)i - \left(3\cdot 1 - 1\cdot 0\right)j + \left(3\cdot(-2) - 1\cdot 3\right)k = 3i - 3j - 9k.$$

$$S_{\square} = \left|\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]\right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{9+9+81} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}\ \text{ед}^2.$$

$$S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}S_{\square} = \frac{3\sqrt{11}}{2}\ \text{ед}^2.$$

г) Объём треугольной пирамиды $V_{\text{пир}}$ равен 1/6 объёма параллелепипеда $V_{\text{пар}}$, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$ как на сторонах. Из свойств смешанного произведения следует, что:

$V_{\text{пар}} = \left|\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right)\right|$, и следовательно,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right)\right|.$$

Определим координаты вектора

$\overline{A_1A_4} = (1-(-1), -1-0, 5-1) = (2, -1, 4).$

По формуле (2.11) имеем

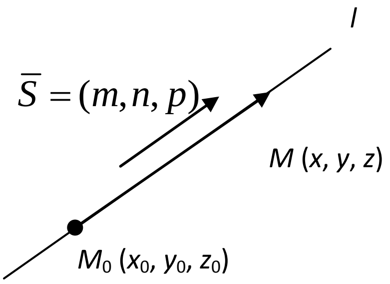
$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-8-(-1) - 3(4-2) + 0 = 3(-7) - 3{\cdot}2 = -27.$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|-27\right| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4{,}5\ \text{ед}^3.$$

Элементы аналитической геометрии в $\boldsymbol{R}_3$

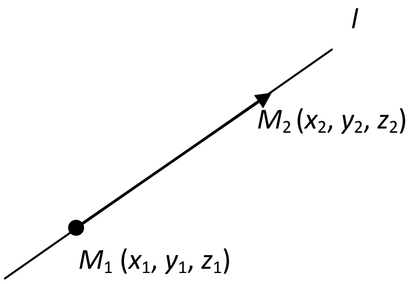
Направляющим вектором прямой называется любой вектор $\overline{S}$, лежащий на этой прямой или ей параллельной и отличный от нуль-вектора, т. е. $\overline{S} \parallel l$ и $\overline{S} \neq \overline{0}$.



Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку M_0 с данным направляющим вектором $\overline{S}$, имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \tag{3.1}$$

где (x, y, z) — координаты текущей точки прямой; (x_0, y_0, z_0) — координаты данной точки на прямой; (m, n, p) — координаты направляющего вектора прямой.



Если на прямой заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\overline{M_1M_2}$:

$$\overline{S} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

Рассматривая в качестве данной точки точку M_1 и используя уравнение (3.1), получим уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{3.2}$$

Пусть прямая l_1 имеет направляющий вектор $\bar{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и прямая l_2 — направляющий вектор $\bar{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Угол φ между прямыми l_1 и l_2 определяется как угол между их направляющими векторами $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$, по формуле (2.6) получаем:

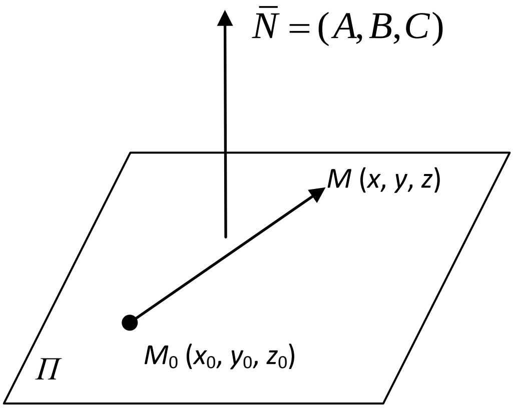
$$\cos\varphi = \frac{\left(\bar{S}_1, \bar{S}_2\right)}{\left|\bar{S}_1\right|\left|\bar{S}_2\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

$l_1 \parallel l_2$, если $\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$, т. е. по условию коллинеарности (2.12)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Критерий перпендикулярности прямых $l_1 \perp l_2$ <=> $\bar{S}_1 \perp \bar{S}_2$. Тогда по условию ортогональности векторов (1.7) $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Нормальным вектором плоскости (*П*) называется любой вектор $\bar{N}$, перпендикулярный к плоскости и отличный от нуль-вектора: $\bar{N} \perp \Pi$ и $\bar{N} \neq \bar{0}$.



Уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 плоскости и имеющей данный нормальный вектор $\bar{N}$, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{3.3}$$

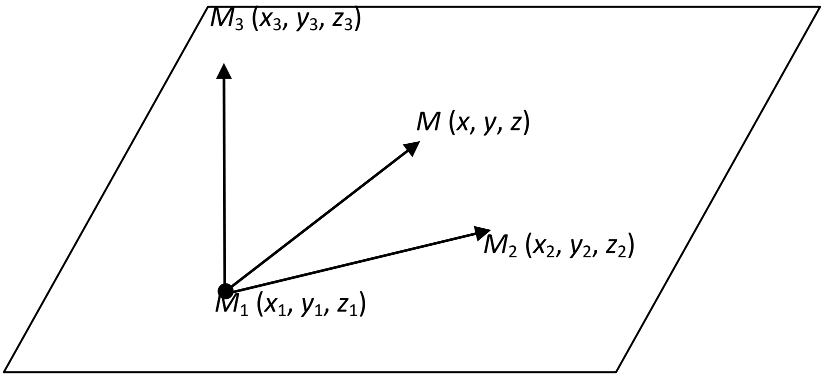
где A, B, C — координаты нормального вектора $\bar{N}$;

x_0, y_0, z_0 — координаты данной точки плоскости;

x, y, z — координаты текущей точки плоскости.

Если в уравнении (3.3) раскрыть скобки, то его можно записать в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{3.4}$$



Уравнение (3.4) называется *общим уравнением плоскости*.

Три точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и $M_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$ (не лежащие на одной прямой) определяют плоскость в R_3. Уравнение такой плоскости можно получить из условия компланарности (2.13) трёх векторов:

$$\overline{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1),$$
$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1),$$
$$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1),$$

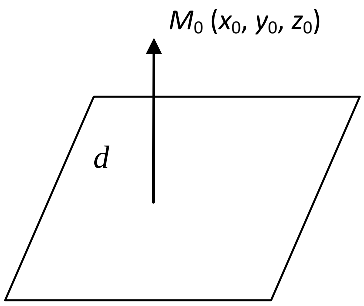
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.5)$$

Здесь x, y, z — координаты текущей точки M;

x_1, y_1, z_1 — координаты данной точки M_1;

x_2, y_2, z_2 — координаты данной точки M_2;

x_3, y_3, z_3 — координаты данной точки M_3.



Пусть плоскость П задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до плоскости П вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (3.6)$$

Угол между двумя плоскостями, нормальные векторы которых $\bar{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\bar{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\bar{N}_1, \bar{N}_2\right)}{|\bar{N}_1||\bar{N}_2|}.$$

Критерий параллельности плоскостей:

$$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2, \ \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

Критерий перпендикулярности плоскостей:

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \ \Leftrightarrow \ \bar{N}_1 \perp \bar{N}_2 \ \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Угол между прямой и плоскостью ψ определяется как дополнительный к углу φ между направляющим вектором прямой $\vec{S} = (m, n, p)$ и вектором нормали к плоскости $\bar{N} = (A, B, C),$ таким образом ψ=90^0-φ и получаем:

$$\sin\psi = \cos\varphi = \frac{\left(\vec{S}, \vec{N}\right)}{\left|\vec{S}\right| \cdot \left|\vec{N}\right|}. \qquad (3.7)$$

Задание 4 (продолжение). Даны координаты вершин треугольной пирамиды
A_1 (–1, 0, 1), A_2 (2, 3, 1), A_3 (0, –2, 2), A_4 (1, –1, 5). Продолжение задания 5 пункты д—з.

Требуется найти:

д) канонические уравнения прямой l, проходящей через точки A_1 и A_4;

е) уравнение плоскости П, проходящей через точки A_1, A_2, и A_3;

ж) угол между прямой l и плоскостью П;

з) высоту пирамиды.

***Решение*:**

д) Для нахождения канонических уравнений прямой A_1A_4 используем уравнение (3.2) прямой, проходящей через две точки A_1 (–1, 0,1) и A_4 (1,–1,5):

$$A_1A_4\text{:}\ \frac{x-(-1)}{2-1} = \frac{y-0}{3-(-1)} = \frac{z-1}{1-5} \text{ или } \frac{x+1}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-4}.$$

е) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ получим, используя уравнение плоскости (3.5), проходящей через три данные точки A_1 (–1, 0, 1), A_2 (2, 3, 1), A_3 (0, –2, 2):

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-0 & z-1 \\ 2-(-1) & 3-0 & 1-1 \\ 0-(-1) & -2-0 & 2-1 \end{vmatrix}=0 \text{ или } \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки, получим:

$$(x+1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x+1)-3y-9(z-1)=0.$$

Делим все члены уравнения на 3 и раскрываем скобки:

$x+1-y-3z+3=0.$

Окончательно уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид:

$x-y-3z+4=0.$

ж) Угол между прямой l и плоскостью П найдём по формуле (3.7). Уравнение прямой l получено в пункте д) и имеет вид $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-4}$, Координаты направляющего вектора – это числа в знаменателях, следовательно: $\vec{S}=(1,4,-4)$. Уравнение плоскости П получено в пункте е) и имеет вид $x-y-3z+4=0.$ Следовательно, нормальный вектор плоскости $\bar{N}$ имеет координаты равные коэффициентам при x, y, z в уравнении плоскости, т. е. $\bar{N}=(1,-1,-3)$.

Используем формулу (3.7):

$$\sin\psi=\frac{1\cdot 1+4\cdot(-1)-4\cdot(-3)}{\sqrt{1^2+4^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\frac{9}{\sqrt{33}\sqrt{11}}=\frac{9}{11\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \psi=\arcsin\frac{9}{11\sqrt{3}}.$$

з) Высоту пирамиды (отрезок A_4A_5 (рис. 1)) можно определить как расстояние точки A_4 (1, –1, 5) до плоскости $A_1A_2A_3$ по формуле (3.6).

$A_1A_2A_3$: $x-y-3z+4=0.$

Точка A_4 (1, –1, 5).

В уравнение плоскости вместо x, y, z подставим координаты A_4 и поделим $\left|\bar{N}_1\right|$.

$$h=A_4A_5=\frac{|1-(-1)-3\cdot 5+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\frac{|1+1-15+4|}{\sqrt{11}}=\frac{|-9|}{\sqrt{11}}=\frac{9}{\sqrt{11}}.$$

Краткие сведения из теории пределов функции

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.ф.) при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0 \right)$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* (б.б.ф.) при $x \to x_0$, ($x \to \infty$), если для любого M>0 найдётся число $\delta > 0$, зависящее от M, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство $|f(x)| > M$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \right)$.

Если $\alpha(x)$ есть б. м.ф. при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$), то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ является б. б., и обратно, если $f(x)$ б.б.ф. при $x \to x_0$, то $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ является б.м.ф.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ б.м.ф. при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то чтобы сравнить их, нужно вычислить предел их отношения. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k.$ Тогда:

при $k = 0$ $\alpha(x)$ называется б.м. более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$;

при $0 < k < \infty$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости;

при $k = \infty$ $\alpha(x)$ более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$.

Если $k = 1$, то б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Предел отношения двух б.м.ф. не изменится, если каждую б.м.ф. заменить на эквивалентную.

Примеры эквивалентных б.м.ф. при $\alpha(x)\to 0$:

$$\alpha(x)\sim\sin\alpha(x)\sim\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\arcsin\alpha(x)\sim$$
$$\sim\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim e^{\alpha(x)}-1\sim a^{\alpha(x)}-1\sim\ln a\sim\ln(1+\alpha(x)).$$

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ (c=const).

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=\frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e \text{ или } \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e.$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),$ нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c=\text{const},\ \ c\neq 0,\ \ c\neq\infty,$ то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$$\frac{0}{c}\to 0;\ \ \frac{c}{0}\to\infty;\ \ \frac{\infty}{c}\to\infty;\ c\cdot\infty\to\infty; c\cdot 0\to 0;\ \ a^\infty\to 0, \text{если } 0<a<1; a^\infty\to\infty, \text{если } a>1.$$

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \ \left(\frac{0}{0}\right);\ \ (0\cdot\infty);\ \ (\infty-\infty);\ (1^\infty);\ (\infty^0);\ (0^0).$$

Устранить неопределенность можно с помощью алгебраических преобразований или используя правило Лопиталя.

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (5.1)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5.1).

Задание 5. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6};\quad б)\ \lim_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14};\quad в)\ \lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4+x}}{\mathrm{tg}5x}.$$

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо x предельное значение ∞, определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to\infty}(4x^3+2x-3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(4+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=\infty\cdot4=\infty,\ \text{т. к. } \frac{2}{x^2}\to0,\ \frac{3}{x^3}\to0.$$

Аналогично: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+6)=\infty.$

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+2x-3)'}{(x^2+6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+2)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{2}=\lim_{x\to\infty}12x=\infty.$$

$$б)\ \lim_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}=\lim_{x\to-7}\frac{2(-7)^2+15(-7)+7}{(-7)^2+5(-7)-14}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$= \lim_{x\to -7}\frac{(2x^2+15x+7)'}{(x^2+5x-14)'} = \lim_{x\to -7}\frac{4x+15}{2x+5} = \lim_{x\to -7}\frac{4(-7)+15}{2(-7)+5} = \frac{-13}{-9} = \frac{13}{9}.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4+x}}{\mathrm{tg}5x} = \lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4+0}}{\mathrm{tg}(5\cdot 0)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(2-\sqrt{4+x})'}{(\mathrm{tg}5x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(4+x)^{-1/2}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 5x}{10\sqrt{4+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2(5\cdot 0)}{10\sqrt{4+0}} = \frac{-1}{20}.$$

Замечание. Если, применив правило Лопиталя, снова получили неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то снова применяем правило до тех пор, пока неопределённость не будет раскрыта.

Теоретические вопросы

Линейная алгебра. Векторная алгебра.

1. Понятие матрицы, типы матриц
2. Операции с матрицами (сложение, умножение на число, умножение матрицы на матрицу, транспортирование матриц). Свойства операций.
3. Определители матриц, их свойства.
4. Разложение определителя по элементам любой строки, столбца.
5. Обратная матрица. Критерий ее существования и формула для вычисления.
6. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
7. Совместные, несовместные, определенные, неопределенные СЛАУ.
8. Формулы Крамера для решения СЛАУ.
9. Матричный метод решения СЛАУ.
10. Минор матрицы, ранг матрицы.
11. Элементарные преобразования матриц, эквивалентные матрицы и их ранги.
12. Линейно зависимые, линейно независимые строки матрицы. Критерий линейной зависимости.
13. Критерий совместности СЛАУ Кронекера-Капелли.
14. Метод Гаусса решения СЛАУ. Базисный минор, базисные и свободные переменные СЛАУ.
15. Понятие n-мерного вектора, операции с векторами.
16. Линейное арифметическое векторное пространство.
17. Линейно зависимая и независимая система векторов. Критерий линейной зависимости системы векторов.
18. n-мерное евклидово пространство En. Скалярное произведение в E_3, его свойства. Механический смысл скалярного произведения, модуль вектора, направление косинусы вектора.

19. Проекция вектора на вектор, ортогональные, коллинеарные, компланарные векторы.

24. Вектор как направленный отрезок. Декартов прямоугольный базис и декартова прямоугольная система координат (д.п.с.к.).

25. Радиус-вектор точки, координаты точки в д.п.с.к.

26. Векторное произведение векторов в E_3, его свойства, механический смысл.

27. Смешанное произведение векторов в E_3, его свойства.

28. Условия ортогональности, коллинеарности, компланарности векторов в E_3.

Аналитическая геометрия

1. Понятие уравнения геометрического образа.
2. Плоскость, нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости и его частные случаи.
3. Угол между плоскостями, условие перпендикулярности и параллельности плоскостей, расстояние от точки до плоскости. Плоскость в En, $n>3$.
4. Прямая в E_3, ее направляющий вектор. Общие, канонические, параметрические уравнения прямой. Луч и отрезок.
5. Угол между прямыми в E_3. Перпендикулярные, параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые. Расстояние от точки до прямой в E_3. Прямая, луч и отрезок в En, $n>3$.
6. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Точка пересечения прямой и плоскости, принадлежность прямой плоскости.
7. Прямая на плоскости, как частный случай прямой в E_3 и как линия пересечения плоскости с плоскостью OXY.
8. Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом.

Введение в анализ

1. Функция одной переменной, способы задания. Основные элементарные функции, их графики. Сложная функция.
2. Предел функции.
3. Бесконечно малая функция и ее свойства.
4. Бесконечно большая функция, связь с бесконечно малой.
5. Основные теоремы о пределах функции (критерий существования предела, единственность, предел суммы, произведения, частного).
6. Первый и второй специальные пределы.
7. Сравнение бесконечно малых функций.
8. Непрерывность функции в точке, на интервале, отрезке. Основные теоремы о непрерывных функциях (непрерывность основных элементарных функций, сложной функции).

9. Свойства функций непрерывных на замкнутом отрезке, абсолютный экстремум функции.
10. Правило Лопиталя.

Учебно-методические материалы и программно-информационное обеспечение

№ п/п	Автор	Название	Издательство	Год издания	Вид издания	Адрес электронного ресурса	Вид доступа
1	2	3	4	5	6	8	9
1.1	Бермант А.Ф., Арамановић И.Г.	Краткий курс математического анализа	СПб: Лань	2008	Учебное пособие		
1.2	Владимирский Б.М., Горстко	Математика общий курс	СПб: Лань	2008	учебник		
1.3	Данко П.Е. Попов А.Г.	Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1	М.: Мир и Об-разование	2015 2009 2008 2007	Учебное пособие		
1.4	Данко П.Е. Попов А.Г.	Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2	М.: ОНИКС: Мир и Об-разование	2015 2009 2008 2007	Учебное пособие		
2.1	Шипачёв В.С.	Высшая математика	М: Юрайт	2011 2012	Учебное пособие		
2.2	Виленкин И.В.	Высшая математика: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное и интегральное исчисление	Ростов н/Д: Феникс	2011	Учебник		
2.3	Виленкин И.В.	Высшая математика: интегралы по мере, дифференциальные уравнения, ряды	Ростов н/Д: Феникс	2011	Учебник		
2.4	Кузнецов Б.Т	Математика	М.: ЮНИТИ-ДАНА	2012	учебник	http://iprbookshop.ru	С любой точки доступа для

							авторизованного поль-зователя
2.5	Полтинников В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.1	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2012	Учебное пособие		
2.6	Полтинников В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.2	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2013	Учебное пособие		
2.7	Полтинников В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.3	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2014	Учебное пособие		
6.2.10	Полтинников В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.4	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2015	Учебное пособие		
2.8	Пожарский Д.А., Нурутдинова И.Н.	Избранные главы математики: интегральное исчисление, дифференциальные уравнения	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2014	Учебное пособие		
2.9	Нурутдинова И.Н., Соболев В.В.	Сборник образцов решения заданий базового уровня по дисциплине «Математика»	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2013	Учебное пособие	ntb.donstu.ru	С любой точки доступа для авторизованного поль-зователя
3.1		Сайт Math Высшая математика. Решение задач и примеров – online				http://www.math-pr.com/index.html	С любой точки доступа
3.2		Сайт Решение задач по математике online				http://www.reshmat.ru/index.html	С любой точки доступа